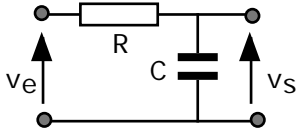


## **GRAPHES ASYMPTOTIQUES DE BODE**

## GRAPHES ASYMPTOTIQUES DE BODE

*But : Tracer la courbe de réponse en fréquences du module en dB et de l'argument d'une fonction de transfert en utilisant les gabarits de fonctions élémentaires représentées par des segments de droites en coordonnées semi-logarithmiques.*

### 1) EXEMPLE : CIRCUIT RC INTEGRATEUR



Considérons un circuit R C intégrateur excité par une tension sinusoïdale  $v_e = V_{em} \sin(2\pi f t)$  d'amplitude  $V_{em}$  constante et de fréquence  $f$  variable. Ce circuit est défini par sa fonction de transfert :

$$\underline{T}(f) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 + j 2\pi f RC}$$

En faisant intervenir la fréquence de coupure à -3 dB :  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ , on peut écrire :

$$\underline{T}(f) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad \underline{T}(f) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 + j x}$$

La variable  $x$  représente la fréquence réduite. La figure 1 donne les résultats, sur une échelle semi-logarithmique, du calcul (carrés) :

- du module de  $T(x)$  exprimé en décibels soit :  $-10 \log(1+x^2)$  (1)
- de l'argument  $\Phi(x)$  de  $T(x)$  :  $\Phi = -\text{Arctan}(x)$  (2)

On notera que  $x=1$  correspond à la fréquence  $f_c$  de coupure à -3dB du circuit où  $\Phi = -45^\circ$ .

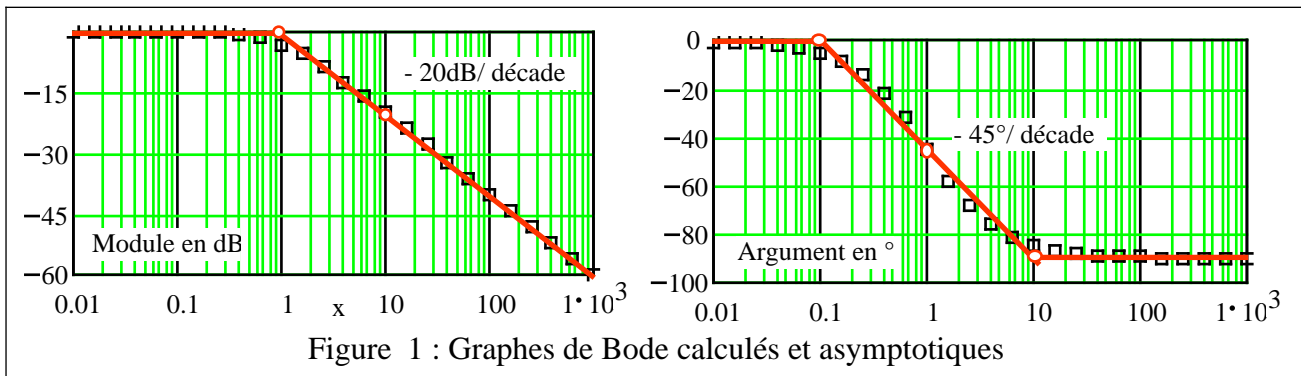


Figure 1 : Graphes de Bode calculés et asymptotiques

Pour obtenir les graphes de Bode asymptotiques qui forment les gabarits des courbes calculées points par points, il faut rechercher les asymptotes des équations (1) et (2).

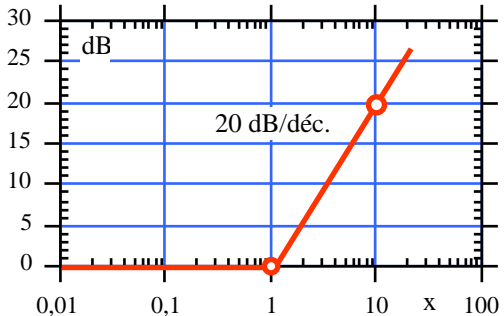
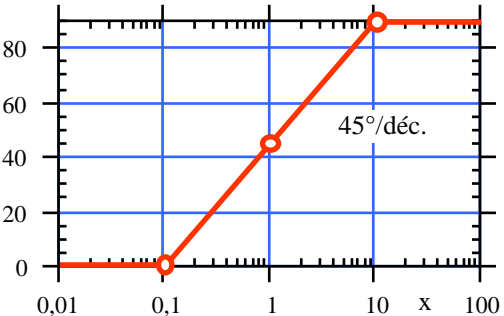
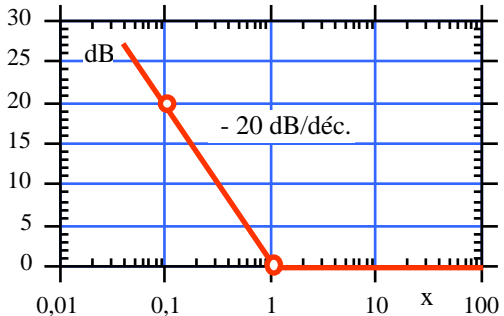
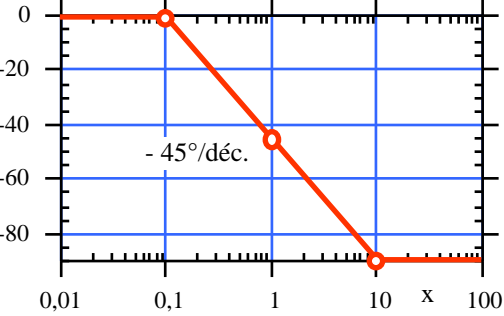
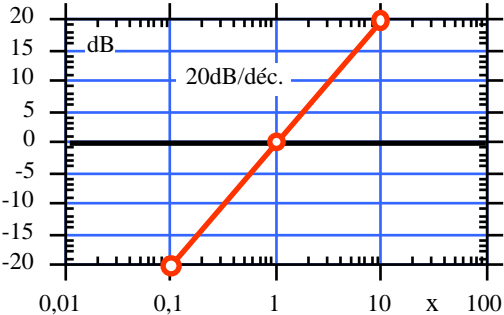
a) La fonction  $|T(x)|_{dB} = -10 \log(1+x^2)$  possède deux asymptotes :

- pour  $x \rightarrow 0$  l'asymptote est confondue avec l'axe des abscisses.
- Pour  $x \rightarrow +\infty$  l'asymptote passe par  $x=1$  et possède une pente de -20 dB / décade.

b) La fonction  $\Phi = -\text{Arctan}(x)$  possède deux asymptotes :

- Pour  $x \rightarrow 0$  l'asymptote est confondue avec l'axe des abscisses.
- Pour  $x \rightarrow +\infty$  l'asymptote correspond à un déphasage de  $-90^\circ$ .
- Le segment de droite passant par  $(x=0, \Phi=0^\circ)$  et  $(x=1, \Phi=-90^\circ)$ , soit un coefficient directeur de  $-45^\circ$  par décade, complète le gabarit.

## 2) FONCTIONS ELEMENTAIRES DE BODE

Fonction de transfert $x = \frac{f}{f_c}$	Gabarit du module	Gabarit de l'argument
$T(f) = 1 + jx$	<p style="text-align: center;"><b><math>10 \log(1+x^2)</math></b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Arctan (x)</b></p> 
$T(x) = \frac{1}{1 + jx}$	<p style="text-align: center;"><b><math>-10 \log(1+x^2)</math></b> Symétrique par rapport à l'axe ox du précédent</p>	<p style="text-align: center;"><b>- Arctan (x)</b> Symétrique par rapport à l'axe ox du précédent</p>
$T(f) = 1 + j\frac{1}{x}$	<p style="text-align: center;"><b><math>10 \log(1 + \frac{1}{x^2})</math></b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Arctan ( 1/x )</b></p> 
$T(f) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{x}}$	<p style="text-align: center;"><b><math>-10 \log(1 + \frac{1}{x^2})</math></b> Symétrique par rapport à l'axe ox du précédent</p>	<p style="text-align: center;"><b>- Arctan ( 1/x )</b> Symétrique par rapport à l'axe ox du précédent</p>
$T(f) = jx$	<p style="text-align: center;"><b><math>10 \log(x^2)</math></b></p> 	<p style="text-align: center;"><b>90°</b></p>
$T(x) = \frac{1}{jx}$	<p style="text-align: center;"><b><math>-10 \log(x^2)</math></b> Symétrique par rapport à l'axe ox du précédent</p>	<p style="text-align: center;"><b>- 90°</b> Symétrique par rapport à l'axe ox du précédent</p>

### 3) EXEMPLE : SONDE COMPENSEE DE L'OSCILLOSCOPE

En travaux pratiques, on mesure la tension sinusoïdale  $v_1$  particulière d'un montage électronique avec un oscilloscope en utilisant un câble blindé "B.N.C. banane". Sachant que l'entrée de l'oscilloscope possède :

- Une résistance d'entrée  $R_e$  de 1 M
- Une capacité d'entrée  $C_e$  de 25 pF

et que le câble blindé représente une capacité  $C_{\text{câble}}$  de 100 pF, on ramène entre le point de mesure sur le montage et la masse une impédance (fig.2) constituée par :

- $R_e = 1\text{M}$  et  $C_1 = C_{\text{câble}} + C_e = 125\text{ pF}$ .

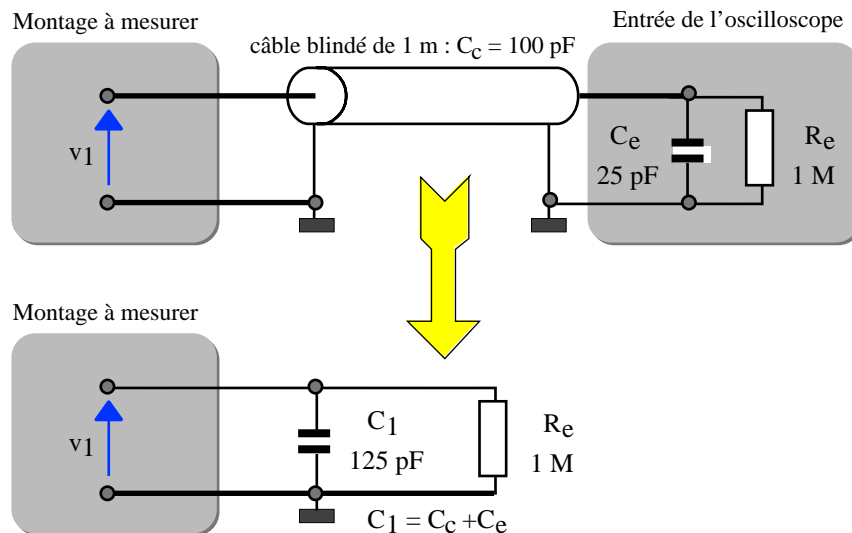


Figure 2

Cette impédance peut donner une mesure erronée de la tension  $v_1$ . C'est pourquoi, il convient d'utiliser une sonde (probe) correctement réglée connectée sur l'entrée de l'oscilloscope. Cette sonde (figure 3) est constituée d'un câble blindé analogue au précédent et d'une tête de sonde. La tête de sonde est constituée par une résistance série  $R_2$  de 9 M en parallèle avec une capacité  $C_2$  variable entre 5 à 50 pF. Le schéma du montage complet est indiqué en figure 4.

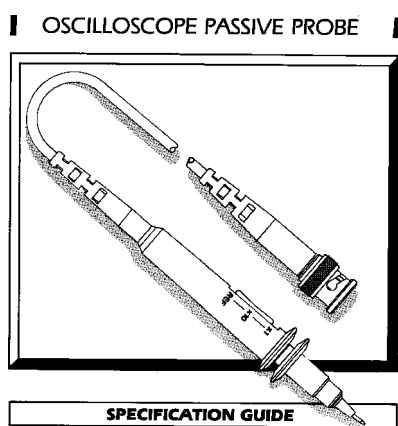


Figure 3 : sonde

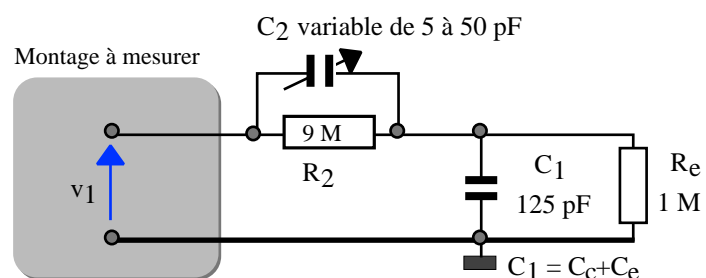


Figure 4 : schéma du montage complet

(1) Calculons l'expression de la fonction de transfert  $\underline{T}(\omega) = v_2 / v_1$  en l'organisant sous une forme permettant de tracer le graphe asymptotique de Bode du montage. En posant :

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \quad Z_1 = \frac{R_e}{1 + j\omega R_e C_1}$$

$$T(\omega) = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_e}{1 + j\omega R_e C_1} \frac{1}{\frac{R_e}{1 + j\omega R_e C_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}$$

Après développement, il vient :

$$T(\omega) = \frac{R_e}{R_e + R_2} \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega (R_e // R_2) (C_1 + C_2)} \quad (1)$$

La relation (1) possède une forme qui permet d'exploiter les graphes asymptotiques de Bode. En effet il apparaît deux constantes de temps  $\tau_2 = R_2 C_2$  et  $\tau_1 = (R_e // R_2)(C_1 + C_2)$ . Aux constantes de temps, on fait correspondre les fréquences de coupures à -3dB :

$$f_{c1} = \frac{1}{2\pi \tau_1} \text{ et } f_{c2} = \frac{1}{2\pi \tau_2}$$

Sachant que  $\tau_2 = 2 \tau_1$ , on écrit (1) selon la relation (2) :

$$T(f) = \frac{R_e}{R_e + R_2} \frac{1 + j \frac{f}{f_{c2}}}{1 + j \frac{f}{f_{c1}}} \quad (2)$$

Expression du module exprimé en dB :

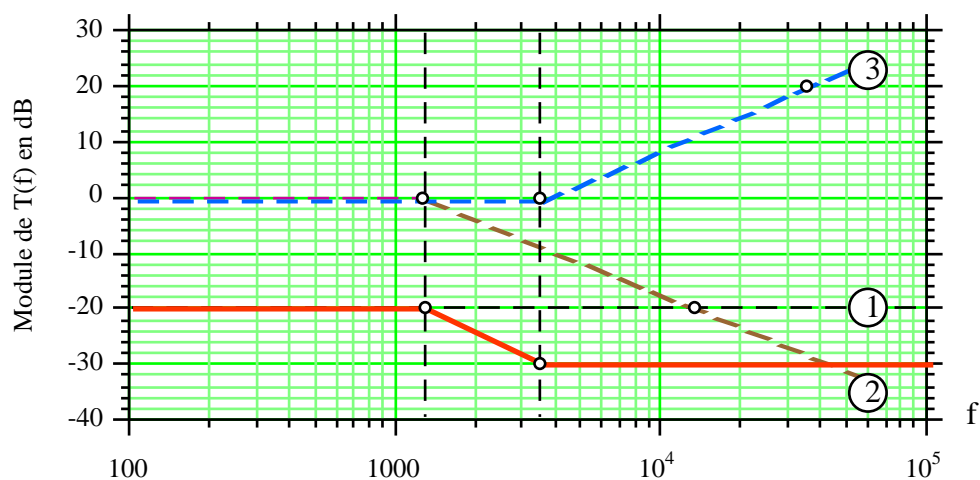
$$|T(f)|_{dB} = 20 \log \left( \frac{R_e}{R_e + R_1} \right) + 10 \log \left( 1 + \left( \frac{f}{f_{c2}} \right)^2 \right) + \left[ -10 \log \left( 1 + \left( \frac{f}{f_{c1}} \right)^2 \right) \right] \quad (3)$$

Expression de l'argument :

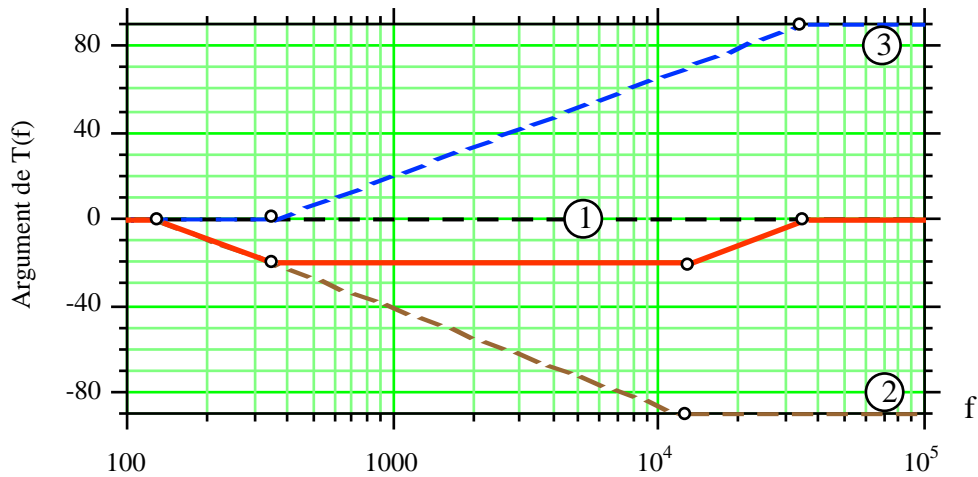
$$\Phi = 0 + \text{Arctan} \left( \frac{f}{f_{c2}} \right) + \left[ -\text{Arctan} \left( \frac{f}{f_{c1}} \right) \right] \quad (4)$$

Les relations (3) et (4) sont chacune composées de trois fonctions élémentaires de Bode notées 1, 2 et 3 sur les graphes.

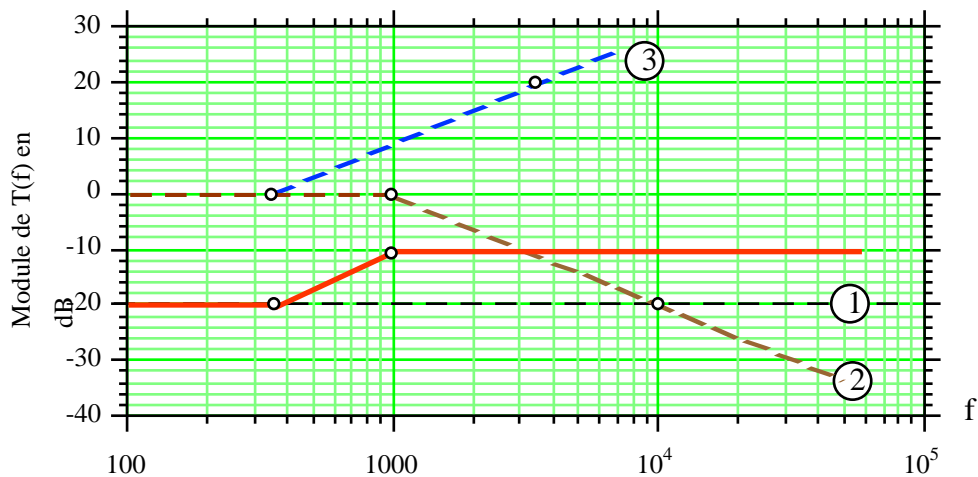
(2) Traçons les graphes asymptotiques de Bode des relations (3) et (4) pour  $C_2 = 5 \text{ pF}$ .  
Les fréquences de coupures à -3dB sont alors :  $f_{c1} = 1.36 \text{ kHz}$  et  $f_{c2} = 3.5 \text{ kHz}$ .



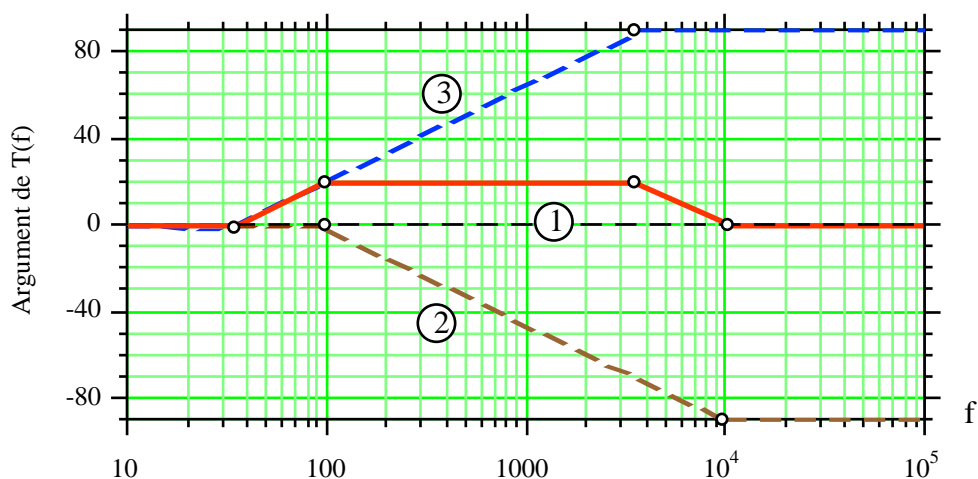
Le graphe résultant (en trait plein) est la somme des graphes 1, 2 et 3. Il montre qu'à partir de la fréquence  $f_{c1}$ , la sonde transmet à l'oscilloscope une tension inférieure à celle souhaitée.



- (3) Traçons les graphes asymptotiques de Bode des relations (3) et (4) pour  $C_2 = 50 \text{ pF}$ .  
Les fréquences de coupures à -3dB sont alors :  $f_{c1} = 1 \text{ kHz}$  et  $f_{c2} = 354 \text{ Hz}$ .



Le graphe résultant (en trait plein) est la somme des graphes 1, 2 et 3. Il montre qu'à partir de la fréquence  $f_{c2}$ , la sonde transmet à l'oscilloscope une tension supérieure à celle souhaitée.



- (4) La sonde réglée doit avoir une courbe de réponse plate en module et en phase. Pour cela il suffit que les fréquences de coupures  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$  soient égales. Cette condition conduit à la relation :  $R_e C_1 = R_2 C_2$  soit  $C_2 = 13.89 \text{ pF}$ . Les graphes notés 2 et 3 se compensent parfaitement. D'autre part on montre que la tension mesurée  $v_1$  voit une résistance de  $10 \text{ M}\Omega$  avec en parallèle une capacité de  $12.5 \text{ pF}$  (au lieu de  $1 \text{ M}\Omega$  et  $125 \text{ pF}$  avec le câble blindé habituel).  
En pratique, pour régler la sonde de l'oscilloscope, on utilise le signal carré de calibrage. On règle la capacité  $C_2$  de telle manière que la trace sur l'écran soit un signal carré parfait.