[1]CONDUCTION DE LA CHALEUR DANS UN CABLE ELECTRIQUE

Un câble en cuivre homogène de section circulaire, de rayon a (5 mm), de longueur L (1m) et de section S, est parcouru par un courant I de 500 A. Le cuivre possède :

- *Une résistivité électrique* $\rho = 1{,}7\ 10^{-8}\ \Omega.m$
- *Une conductivité thermique* $\lambda_C = 418\ W\ m^{-1}\ K^{-1}$

On rappelle que la résistance électrique totale du câble est telle que : $R = \rho \dfrac{L}{S}$

A) ASPECT ELECTRIQUE

1. Déterminer la valeur de la résistance électrique R (Ω) du câble par unité de longueur ainsi que la puissance électrique dissipée P (W). Calculer la valeur de la densité de courant J_{tot} ($A.m^{-2}$).

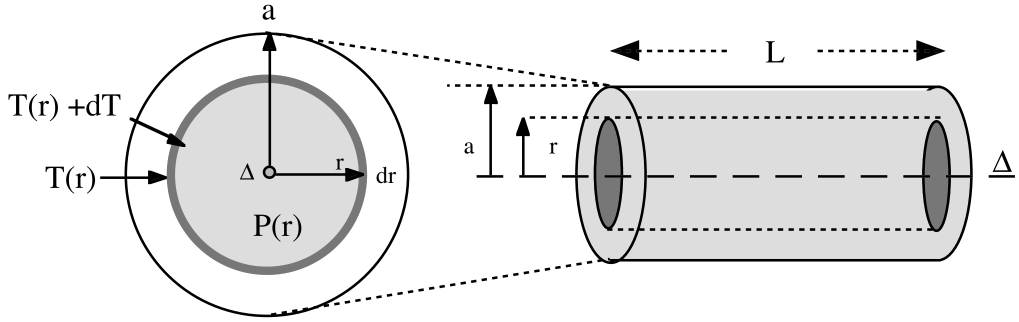
2. On va montrer que la puissance ne se répartie pas uniformément dans le câble. A cet effet, on considère, une portion du câble de rayon r (0 < r ≤ a) et de longueur L. Selon le principe de la conservation de la densité de courant, la densité de courant J (r) dans cette portion, doit être égale à J_{tot}.
   Montrer que la puissance P (r) dissipée dans le câble est telle que :

$$\boxed{P(r) = k.r^2 \quad \text{où} \quad k = \rho \frac{LI^2}{\pi.a^4}}$$

   Tracer le graphe correspondant.

B) ASPECT THERMIQUE

On s'intéresse maintenant à la répartition de la température dans le câble, résultat de la puissance qui s'établit dans le câble de section totale S et de longueur L.
On considère alors un cylindre de rayon r < a, d'épaisseur dr et de surface S_L (r) où se développe la puissance P (r).



[1]Philippe ROUX © 2006 http ://rouxphi3.perso.cegetel.net

1. En exploitant la loi de Fourier, déterminer l'expression du_flux de chaleur $\Phi(r)$ sortant du cylindre considéré. Quelle est la relation entre Φ (r) et P (r)?

2. Montrer que la loi de répartition de la température T(r) à l'intérieur du câble est telle que :

$$T(r) = -\frac{k}{4\pi\lambda L}r^2 + Cte$$

Calculer l'écart température ΔT_c qui règne dans le câble entre son axe Δ et sa surface (r = a).

3. Dans les mêmes conditions, que se passerait-il si on utilisait du graphite (ρ = 6000 $\mu\Omega$ .cm, λ = 17 W $m^{-1}K^{-1}$)?

On isole maintenant le conducteur en cuivre avec du caoutchouc :

- *épaisseur e =1 cm*
- $\lambda_i = 0{,}13\ W\,m^{-1}\ ^{-1}K^{-1}$
- *La température T_S de la surface externe du dispositif est de 20 °C.*

4. Quel est le flux de chaleur (W) qui traverse la gaine isolante? En exploitant à nouveau la loi de Fourier, déterminer l'expression de l'évolution T_i (r) de la température dans la gaine isolante.
   Tracer le graphe T_i (r) pour du dispositif.

5. En utilisant la notion de résistance thermique R_{th}, donner le schéma de <u>simulation thermique</u> équivalent au dispositif. Calculer la température de la surface du câble électrique.

CORRECTION

A) ASPECT ELECTRIQUE

1. R= 2,165 10^{-4} Ω   Puissance : P = 54,11 W

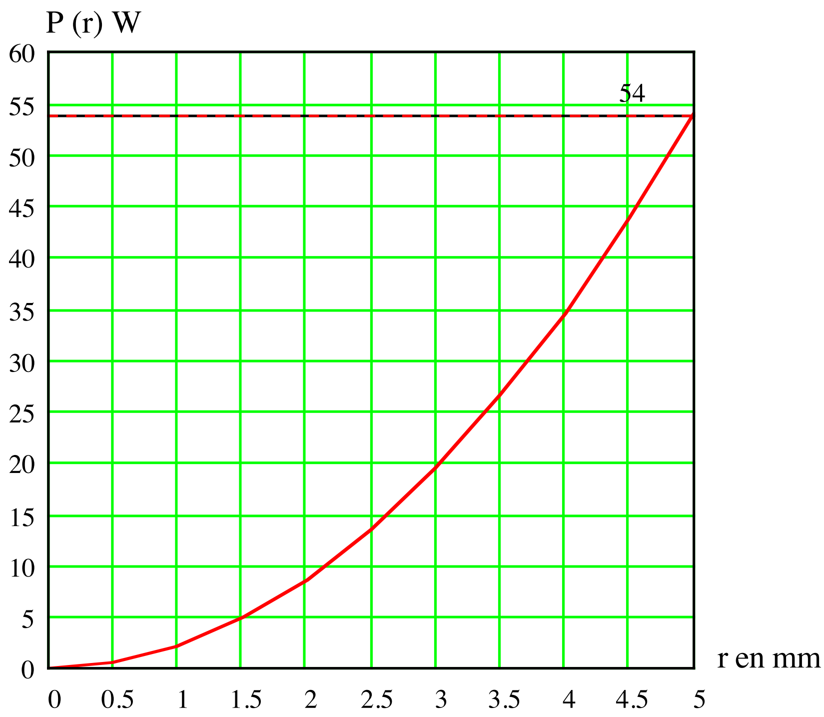
   Densité de courant : $J_{tot} = \dfrac{I}{\pi a^2} = 6{,}366 A.m^{-2}$.

2. Calculons la puissance dissipée dans la portion de câble de rayon r :

$$P(r) = \left[\rho \frac{L}{\pi . r^2}\right]\left[J(r) \pi . r^2\right]^2$$

   Où J (r) représente la densité de courant et ($\pi . r^2$) la surface.
   Sachant que J (r) = J_{tot} selon le principe de la conservation de la densité de courant, il vient :

$$\boxed{P(r) = k . r^2 \quad \text{où} \quad k = \rho \frac{L I^2}{\pi . a^4}} \qquad (1)$$



Répartition de la puissance électrique P (r) dans le câble

B) ASPECT THERMIQUE

1. La loi de Fourier permet de déterminer l'expression du flux de chaleur Φ(r) sortant du cylindre considéré :

$$\boxed{\Phi(r) = -\lambda S_L \frac{dT(r)}{dr}} \qquad (2)$$

   Où S_L représente la surface latérale du cylindre : $S_L = 2\pi r L$.

On a évidemment Φ (r) = P (r) = k r^2.

2. L'égalité des relations (1) et (2) conduit à une équation différentielle du premier ordre :

$$dT(r) = -\frac{k}{2\pi\lambda L} r dr \quad \text{Soit : } T(r) = -\frac{k}{2\pi\lambda L} r^2 + Cte$$

Il n'est pas possible physiquement avec nos données de calculer la constante. On peut cependant déterminer l'écart de température :

$$\Delta T_c = -\frac{k}{2\pi\lambda L}\left[r^2\right]_0^a \qquad \boxed{\Delta T_c = \frac{\rho I^2}{4\pi^2\lambda} = 10^{-3}°C}$$

Ecart de température très faible.

3. Pour le graphite (exemple les charbons d'un démarreur de voiture) : $\Delta T_c = \frac{\rho I^2}{4\pi^2\lambda} = 894°C$!

4. La puissance P (54 W) doit traverser la gaine isolante. La loi de Fourier devient alors :

$$\boxed{P = -\lambda_i S_L \frac{dT_i(r)}{dr}}$$

Avec : $S_L = 2\pi r L$

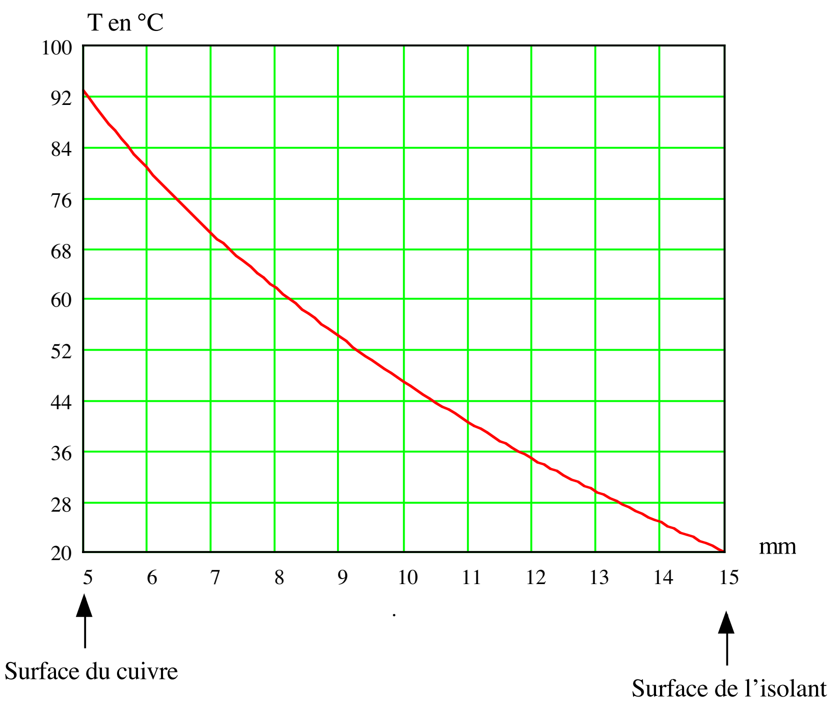
On obtient l'équation différentielle : $dT_i(r) = -\frac{P}{2\pi\lambda_i L}\frac{dr}{r}$ qui a pour solution :

$$\boxed{T_i(r) = -\frac{P}{2\pi\lambda_i L}\ln(r) + Cte}$$

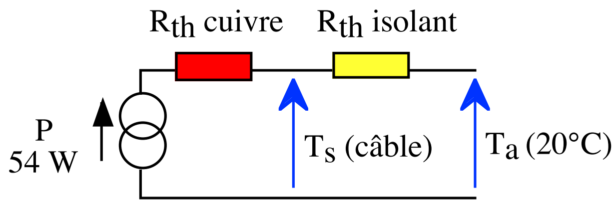
où la constante est la solution de : $T_i(r+e) = 20°C = -\frac{P}{2\pi\lambda_i L}\ln(r+e) + Cte$

et qui conduit à un écart de température : $\Delta T_i = \frac{P}{2\pi\lambda_i L}\ln(1+\frac{e}{a}) = 72{,}9°C$

Graphe de T (r) dans l'isolant :



5. Schéma de simulation thermique équivalent au dispositif.



R_{th} cuivre = 1,8 10^{-4} °C/W
R_{th} isolant = 1,35 °C/W
T_s câble = P (R_{th} isolant) + T_a = 92,9 °C.