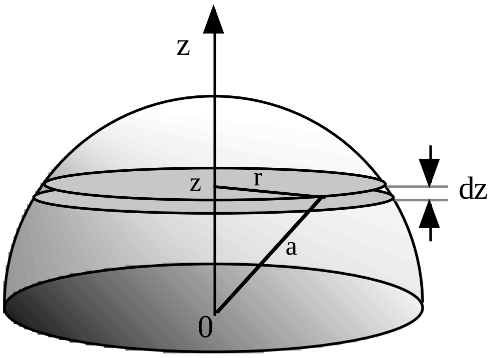
[1]CENTRE DE MASSE

1. Un système est constitué d'une masse m_1 de 3 g localisée à (1, 0, -1), d'une masse m_2 de 5 g à (-2, 1, 3) et d'une masse m_3 de 2 g à (3, -1, 1). Trouver les coordonnées x_G, y_G et z_G du centre de masse.

2. Déterminer le centre de masse x_G d'une tige non homogène de longueur L dont la densité linéique σ_L est proportionnelle à la distance comptée à partir d'une extrémité de la tige : $\sigma_L = a\,x$.

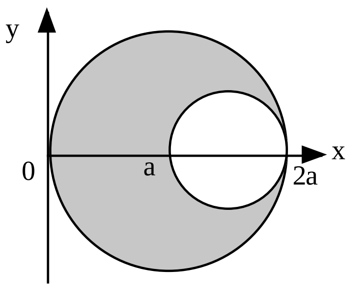
3. Déterminer la position du centre de masse $y_{G,}$ sur l'axe de symétrie 0y, d'un secteur semi-circulaire de rayon R et de densité surfacique σ_S.

4. Déterminer la position z_G sur l'axe 0z du centre de masse d'un hémisphère homogène, de rayon R et de densité volumique σ_v



Pour obtenir des intégrales simples, on divise l'hémisphère en tranches circulaires de rayon r, d'épaisseur dz et de masse dm.

5. *On découpe un trou circulaire de rayon a /2 dans une plaque circulaire de rayon a et de densité surfacique σ_S*



Trouver le centre de masse de la région restante ainsi obtenue.

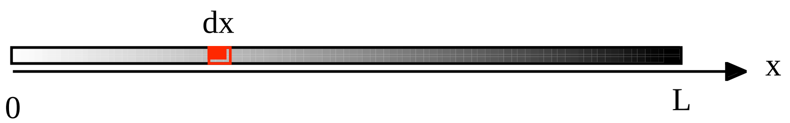
[1] Ph.ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

CORRECTION CENTRE DE MASSE

1. On utilise la définition du centre de masse : $\vec{r}_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=N} m_i \, \vec{r}_i$.

   Soit : x_G = -1/10 : y_G = 3/10 : z_G = 14/10.

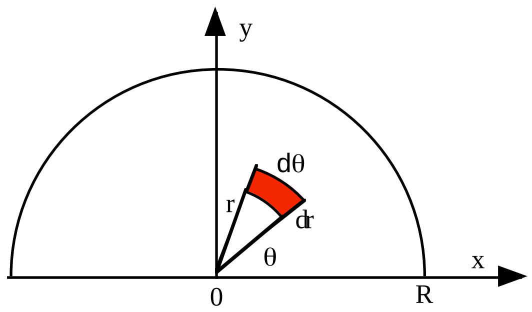
2. Soit une tige de longueur L :



Considérons un élément dx de la tige.
Cet élément possède une masse élémentaire : $dm = \sigma_L .dx$.
La position x_G du centre de masse est tel que :

$$x_G = \frac{\int x.dm}{\int dm} = \frac{\int_0^L ax^2 dx}{\int_0^L axdx} = \frac{2}{3}L$$

6. Considérons un secteur semi-circulaire de rayon R et de densité surfacique σ_S.



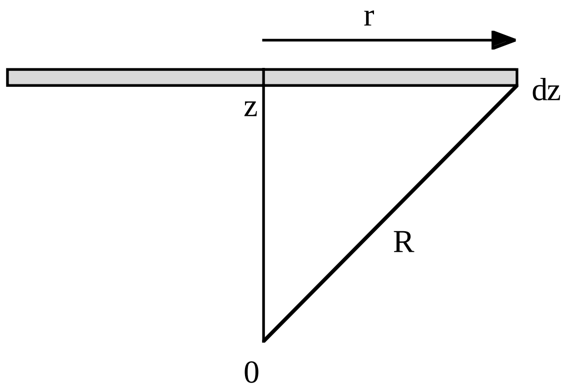
Par commodité, on utilise les coordonnées polaires r et θ.
Considérons alors comme le montre la figure ci-dessus, un élément de surface dS tel que : $dS = r.dr.d\theta$ de masse élémentaire : dm = σ_S.dS.

La position du centre de masse est telle que : $y_G = \frac{\iint dm.y}{\iint dm}$. Avec : $y = r.\sin\theta$.

$$y_G = \frac{\iint \sigma_S r^2 \sin\theta . d\theta . dr}{\iint \sigma_S r. d\theta . dr}$$

$$\boxed{y_G = \frac{\int_0^\pi \sin\theta . d\theta \int_0^R r^2 . dr}{\int_0^\pi \sin\theta . d\theta \int_0^R r. dr} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}}$$

3. Considérons une tranche circulaire de rayon r situé à la distance z de l'origine 0 et de masse dm.

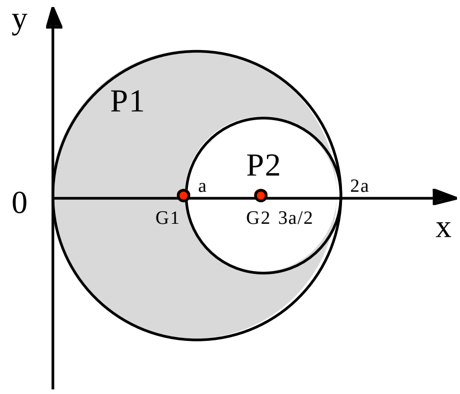


La masse élémentaire de cette tranche est telle que : $dm = \sigma_V(\pi.r^2)dz$ avec : $r^2 = (R^2 - z^2)$.

On en déduit alors : $z_G = \dfrac{\int dm.z}{\int dm}$ soit :

$$\boxed{z_G = \frac{\int_0^R \pi\sigma_V(R^2 - z^2)zdz}{\int_0^R \pi\sigma_V(R^2 - z^2)dz} = \frac{3}{8}R}$$

4. On peut considérer que le système est composé de deux plaques :



- Une plaque P_1 de masse $m_1 = \sigma_S \pi a^2$ et dont le centre de masse G_1 se situe en $x_1 = a$.
- Une plaque P_2 de **masse négative** $m_2 = -\sigma_S \pi \dfrac{a^2}{4}$ et dont le centre de masse G_2 se situe en $x_2 = \dfrac{3a}{2}$.

Le centre de masse de l'ensemble est donc : $\boxed{x_G = \dfrac{m_1.x_1 - m_2 x_2}{m_1 - m_2} = \dfrac{5}{6}a}$