CIRCUITS RLC IDENTIQUES COUPLES PAR MUTUELLE INDUCTANCE [1]

On dispose de deux self-inductances L identiques de valeur 300 µH et de résistance série R. Ces self-inductances ont un coefficient de qualité Q de 100 à la fréquence f_0 de 455 KHz.

1. On veut réaliser avec ces deux selfs deux circuits accordés sur la fréquence de résonnance f_0 de 455 KHz. Calculer les capacités d'accord C nécessaires et la résistance série R des selfs.

On dispose ces deux circuits oscillants R LC au voisinage l'un de l'autre pour former des circuits couplés par une mutuelle inductance M (figure 1). On excite le primaire du montage par une tension v_e sinusoïdale de valeur efficace constante : v_e (eff) =100mV à la fréquence f_0 = 455 KHz.

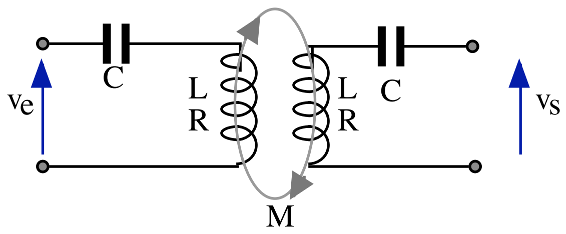


Figure 1

Le secondaire étant ouvert, un voltmètre électronique branché aux bornes de coupure indique une tension v_s (eff) de 200 mV.

2. Calculer à partir de cette mesure :

   a. La valeur de l'indice de couplage n des deux circuits : $n = \omega_0 \dfrac{M}{R}$.

   b. Le coefficient de couplage k et la mutuelle inductance M.

3. On ferme maintenant la secondaire et on mesure la tension v_{s0} aux bornes du condensateur à la fréquence de résonnance f_0 (figure 2). Quelle sera la valeur efficace de la tension v_{s0} (eff) mesurée dans ces conditions ?

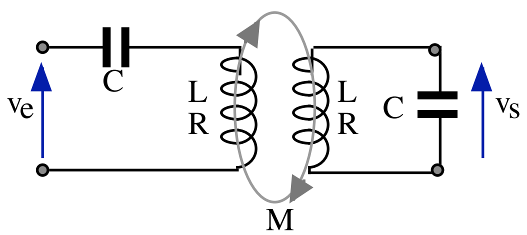


Figure 2

[1] Philippe ROUX © 2009 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

4. On fait maintenant varier la fréquence f de part et d'autre de la fréquence de résonnance f_0 afin de relever la courbe de réponse du montage.

   a. Calculer l'expression des fréquences f_1 et f_2 pour lesquelles la tension v_s sera maximale et la valeur $v_{s\,max}$ de ces maxima. A.N.

   b. Calculer les fréquences f'_1 et f'_2 pour lesquelles v_s reprend la valeur V_{S0}. Montrer que les dissonances correspondantes δ'_1 et δ'_2 sont liées aux dissonances δ_1 et δ_2 (pour f_1 et f_2) par la relation simple : $\delta'_{1,2} = \sqrt{2}\delta_{1,2}$.

   c. Tracer la courbe de réponse.

   d. Calculer en dB la chute de tension entre $v_{s\ max}$ et la tension v_s obtenue pour les fréquences f'_1 et f'_2.

5. On voudrait que les fréquences f'_1et f'_2 soient telles que la chute de tension précédente soit égale à 3dB.

   a. Montrer qu'il faudrait pour cela réaliser un indice de couplage tel que : $n' = 1+\sqrt{2}$.

   b. En déduire alors le coefficient de couplage k' et la mutuelle inductance M'.

   c. Quelles seraient alors :

      - La nouvelle valeur de la tension du secondaire v_s à f_0 = 455 KHz ?
      - Les nouvelles valeurs des fréquences f_1 et f_2 puisf'_1 et f'_2 ?
      - Tracer la nouvelle courbe de réponse.

RAPPELS DE COURS

Au voisinage de la fréquence de résonance f_0 où l'impédance du circuit RLC série est telle que : $\underline{Z} = R(1+2jQ\delta)$, la fonction de transfert du montage circuit couplés s'écrit :

$$\boxed{A = \frac{v_s}{v_e} = \frac{nQ}{\left[(1+jh)^2 + n^2\right]}}$$

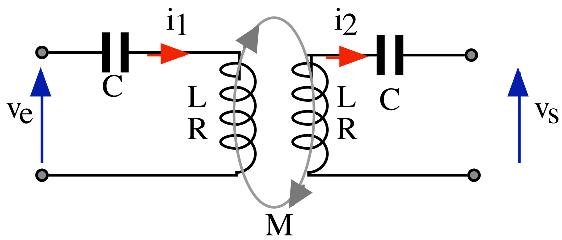
- Indice de couplage : $n = kQ$
- Coefficient de couplage : $k = \dfrac{M}{L}$
- Variable fréquencielle : $h = 2Q\delta$ où $\delta = \dfrac{f-f_0}{f_0}$ reorésente la dissonance.

CORRECTION [2]

1. Calcul des capacités d'accord du circuit oscillant RLC série. La pulsation ω_0 de résonnance est telle que : $LC\omega_0^2 = 1$ avec $\omega_0 = 2\pi f_0$. On obtient alors : C = 407,8 pF.

   Compte tenu de l'expression du coefficient de qualité du circuit RLC série : $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$, pour Q = 100, on obtient : R = 8,57 Ω.

2. Exploitation des mesures avec le secondaire ouvert.



   Expression de la tension d'entrée : $v_e = \underline{Z} i_1$ avec : $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$.

   Expression de la tension de sortie : $v_s = j\omega M i_1$ sachant que le courant i_2 est nul.

   La mesure se faisant à la fréquence de résonnance, on a alors : $\underline{Z}(\omega_0) = R$.

$$\left[\frac{v_s}{v_e}\right]_{f_0} = j\omega_0 \frac{M}{R}$$

   a. Le module de cette expression représente l'indice de couplage n :

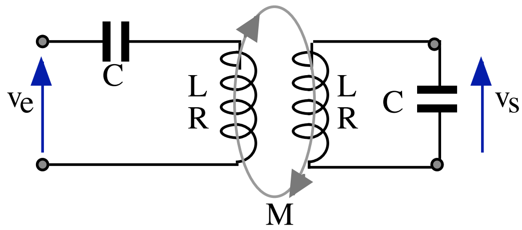
   $\left|\left[\dfrac{v_s}{v_e}\right]_{f_0}\right| = \omega_0 \dfrac{M}{R} = n$. La mesure indique alors un indice de couplage : n = k.Q = 2.

   b. Le coefficient de couplage k est tel que : $\boxed{k = \dfrac{M}{L} = \dfrac{n}{Q} = 2.10^{-2}}$

   Soit une mutuelle inductance : $M = kL = 6\mu H$.

[2] Philippe ROUX © 2009 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

3. Secondaire fermé : valeur efficace de la tension V_{S0} mesurée.



La fonction de transfert du montage est alors tel que : $\dfrac{v_s}{v_e} = -\dfrac{nQ}{(1+jh)^2 + n^2}$

- n = k.Q
- h = 2Qδ avec : $\delta = \dfrac{f - f_0}{f_0}$

La variable fréquentielle h est nulle à la fréquence de résonnance. Dans ces conditions :

$$\boxed{\left[\frac{v_s}{v_e}\right]_{f_0} = -\frac{nQ}{1+n^2} = -40}$$

soit : V_{S0} (eff) = 4 V.

4. On fait maintenant varier la fréquence de part et d'autre de la fréquence de résonnance f_0.

   a. On va chercher la dérivée du module de la fonction de transfert :

$$|A| = \left|\frac{v_s}{v_e}\right| = \frac{nQ}{\sqrt{(1+n^2-h^2)^2 + (2h)^2}}$$

par rapport à la variable fréquence c'est à dire : $h = 2Q\dfrac{f - f_0}{f_0}$.

Pour alléger le calcul, posons : $a = 1 + n^2 - h^2$ et $b = 2h$ de telle sorte que :

$$|A| = \left|\frac{v_s}{v_e}\right| = \frac{nQ}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{soit :} \quad \frac{d|A|}{df} = -\frac{nQ}{2}\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2\left[aa' + bb'\right]$$

Cette dérivée est nulle pour : $\left[aa' + bb'\right]$, conduisant aux solutions : h = 0 (inutile) et $h = \pm\sqrt{n^2 - 1}$

On en déduit finalement : $\boxed{f_1 = f_0\left[1 - \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2Q}\right]}$ et $\boxed{f_2 = f_0\left[1 + \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{2Q}\right]}$

A.N. f_1 = 451 KHz et f_2 = 459 KHz.

Valeur de la tension efficace de sortie aux fréquences f_1 et f_2 où n = 2 et $h^2 = 3$.

$$\boxed{|A|_{f_1,f_2} = \frac{nQ}{\sqrt{(1+n^2-h^2)^2+4n^2}} = \frac{Q}{2}}$$

La tension efficace de sortie est alors de v_{s0} (eff) = 5V.

b. Calcul des fréquences f'$_1$ et f'$_2$ pour lesquelles v_s reprend la valeur V_{S0}.

On doit satisfaire la relation : $\frac{nQ}{n^2+1} = \frac{nQ}{\sqrt{a^2+b^2}}$ soit : $n^2+1=\sqrt{a^2+b^2}$

Avec : $a = 1+n^2-h^2$ et $b = 2h$.

On doit résoudre alors l'équation : $h'^2\left[h'^2+2(1-n^2)\right]=0$ qui a pour solution h' = 0 et $h' = \pm\sqrt{2(n^2-1)}$ ou encore : $h' = \pm\sqrt{2}h$

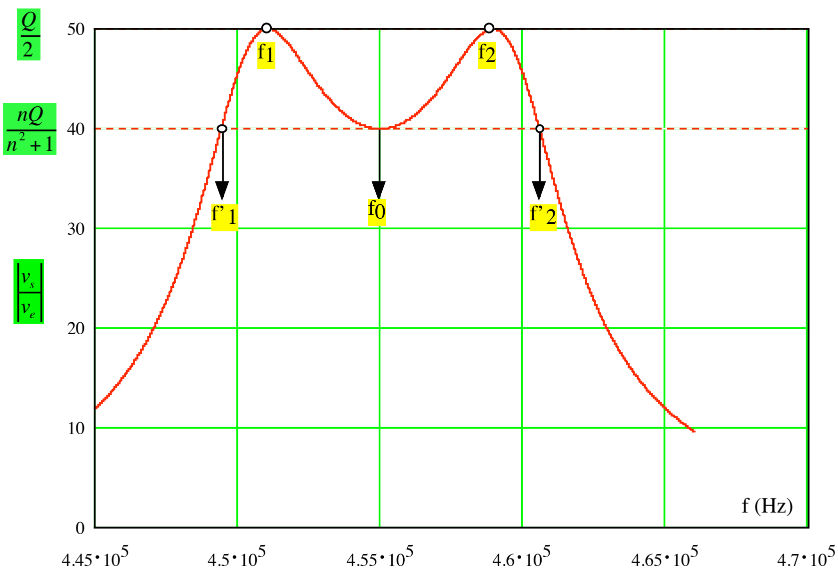
$$\boxed{\delta'_{1,2} = \sqrt{2}\delta_{1,2}}$$

On en déduit les fréquences correspondantes :

$$\boxed{f'_1 = f_0\left[1-\frac{\sqrt{2(n^2-1)}}{2Q}\right]} \qquad \boxed{f'_2 = f_0\left[1+\frac{\sqrt{2(n^2-1)}}{2Q}\right]}$$

f'$_1$ = 449,4 KHz f'$_2$ = 460,6 KHz

c. Courbe de réponse en fréquences.



d. Chute de tension entre $v_{s\ max}$ et la tension v_s obtenue pour les fréquences f'$_1$ et f'$_2$: 1,94 dB.

5. On voudrait que les fréquences f'$_1$et f'$_2$ soient telles que la chute de tension précédente soit égale à 3dB.

   a. Déterminons le nouvel indice de couplage n'. On doit satisfaire à la relation :

   $$\frac{n'Q}{n'^2+1}=\frac{Q}{2\sqrt{2}} \qquad \text{soit : } n'^2-2\sqrt{2}n'+1=0$$

   Solution : $\boxed{n'=1+\sqrt{2}}$

   b. Coefficient de couplage : $n'=k'Q=2{,}41.10^{-2}$.

   Mutuelle inductance : $M=k'L=7{,}23\mu H$.

   c. Nouvelle valeur de la tension de sortie à la résonnance : v_s (eff)= 3,53 V.

   f'$_1$ = 444,9 KHz f'$_2$ = 462 KHz