VECTEURS UNITAIRES T, N, RAYON DE COURBURE[1]

`

Soit C une trajectoire repérée dans un référentiel $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par le vecteur position : $\vec{r}\left|\begin{array}{ll} 3\cos(2t) & \vec{i} \\ 3\sin(2t) & \vec{j} \\ 8t-4 & \vec{k} \end{array}\right.$

1. Quelle est la nature de la trajectoire associée au vecteur position?

2. Déterminer à tout instant l'expression du vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire.

3. Déterminer l'expression du rayon de courbure ρ.

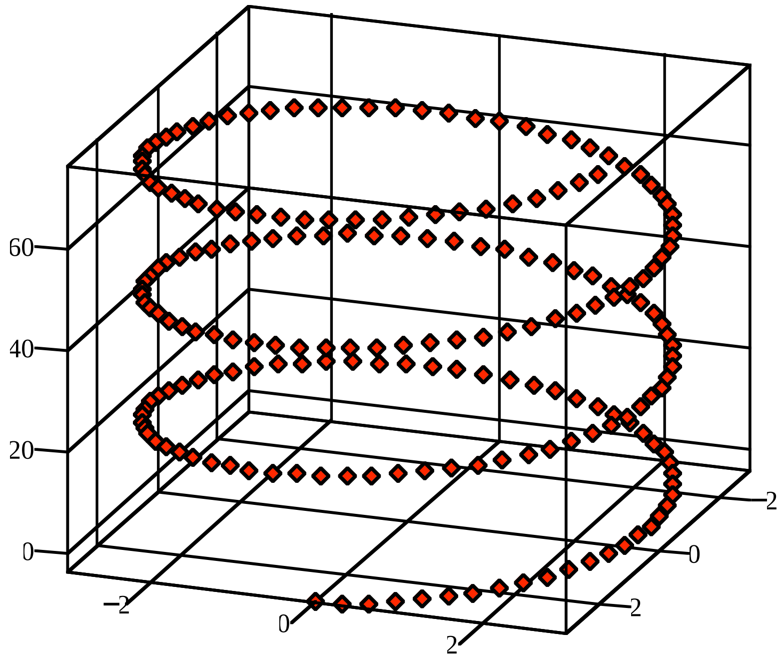
4. Déterminer l'expression du vecteur unitaire $\vec{N}$ dirigé le long de la normale principale en tout point de la trajectoire.

5. Déterminer l'expression de l'angle θ entre le rayon de courbure et l'axe Oz.

[1] Ph. ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

CORRECTION

1. La trajectoire forme une hélice comme le montre la figure suivante.



x , y , z

2. Pour déterminer le vecteur unitaire $\vec{T}$, on exploite sa définition, à savoir : $\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\left| \begin{array}{ll} -6\sin(2t) & \vec{i} \\ 6\cos(2t) & \vec{j} \\ 8 & \vec{k} \end{array} \right. \qquad \|\vec{v}\| = 10 \;\; m.s^{-1} \qquad \vec{T}\left| \begin{array}{ll} -0,6\sin(2t) & \vec{i} \\ 0,6\;\;\cos(2t) & \vec{j} \\ 0,8 & \vec{k} \end{array} \right.$$

3. Avec l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du mobile et son module, la détermination à chaque instant du rayon de courbure ρ fait appel à la relation suivante :

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\| . \left\|\frac{dt}{ds}\right\|}$$

Dans cette relation, on notera que :

- $\left\|\dfrac{dt}{ds}\right\| = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}$ = 1/10
- $\left\|\dfrac{d\vec{T}}{dt}\right\|$ est obtenu à l'aide du vecteur unitaire $\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ que l'on dérive par rapport au temps ($\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\dfrac{d\vec{v}}{dt}$) et dont on calcule le module.

Ainsi :

$$\frac{d\vec{T}}{dt}\left|\begin{array}{ll} -1,2\cos(2t) & \vec{i} \\ -1,2\sin(2t) & \vec{j} \\ 0 & \vec{k} \end{array}\right. \qquad \text{module : } \left\|\frac{d\vec{T}}{dt}\right\| = 1,2$$

Le rayon de courbure ρ est constant soit 8,33 m.

4. Expression du vecteur unitaire $\vec{N}$ dirigé le long de la normale principale.

   On utilise la relation : $\boxed{\vec{N} = \rho \frac{d\vec{T}}{ds}}$

   Compte tenu des résultas précédents : $\vec{N}\left|\begin{array}{ll} -\cos(2t) & \vec{i} \\ -\sin(2t) & \vec{j} \\ 0 & \vec{k} \end{array}\right.$

5. L'angle θ entre le rayon de courbure et l'axe Oz est obtenu en utilisant le produit scalaire $\vec{k}.\vec{N}$.

   Sachant que $\vec{k}\left|\begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ 1 & \vec{k} \end{array}\right.$ on en déduit : $\vec{k}.\vec{N} = 0$.

   Or $\vec{k}.\vec{N} = \|\vec{k}\|.\|\vec{N}\|\cos\theta$, soit $\theta = \frac{\pi}{2}$.