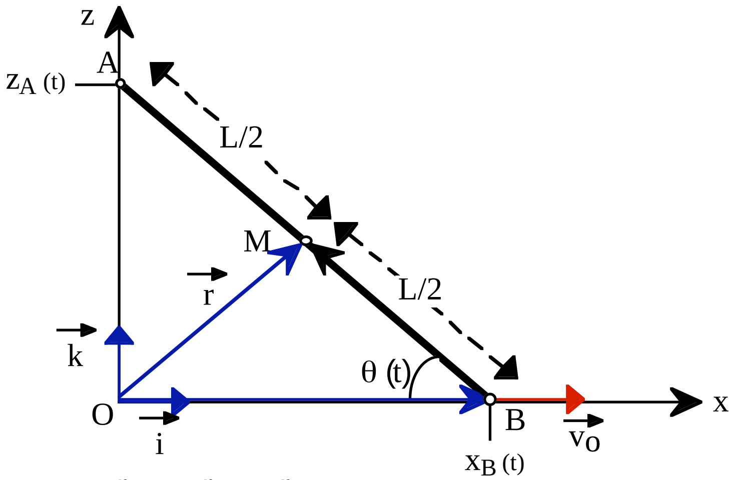
ECHELLE DRESSEE CONTRE UN MUR[1]

Une échelle AB de longueur L est appuyée contre un mur vertical Oz de vecteur unitaire $\vec{k}$. *Le pied B de cette échelle glisse sur le sol selon la direction Ox de vecteur unitaire* $\vec{i}$.



1. En remarquant que $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}$, déterminer l'expression du vecteur position du milieu M de l'échelle : $\vec{OM} = \vec{r}$ en fonction de L et l'angle θ (t) qui varie en fonction du temps.

2. Lorsque le point B se déplace, montrer que le milieu M de l'échelle décrit un arc de cercle de rayon (L/2) centré en O.

3. Déterminer l'expression, en fonction de L et de θ (t), des composantes v_{Mx} et v_{Mz} du vecteur vitesse $\vec{v}_M$ du milieu M de l'échelle.

En fait, le pied B de l'échelle s'éloigne du mur à la vitesse constante $\vec{v}_0$ *sur l'axe Ox de vecteur unitaire* $\vec{i}$. *Le mouvement de B est donc de la forme :* $x_B(t) = v_o.t$.

4. En remarquant que : x_B (t) = L cos θ (t), exprimer la vitesse angulaire de l'angle θ (t) soit : $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de v_o, L et θ.

5. Montrer que l'expression du module du vecteur vitesse du milieu M de l'échelle est telle que : $v_M(t) = \dfrac{L.v_0}{2\sqrt{L^2 - x_B^2(t)}}$.

---

[1] Ph.ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

CORRECTION

1. Vecteur $\vec{OB} = \begin{vmatrix} -L\cos\theta & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \end{vmatrix}$ Vecteur $\vec{BM} = \begin{vmatrix} \frac{L}{2}\cos\theta & \vec{i} \\ \frac{L}{2}\sin\theta & \vec{j} \end{vmatrix}$

   On en déduit : vecteur $\vec{r} = \vec{OB} + \vec{BM} = \begin{vmatrix} \frac{L}{2}\cos\theta & \vec{i} \\ \frac{L}{2}\sin\theta & \vec{j} \end{vmatrix}$

2. Si on nomme x_M et y_M la projection du point M sur les axes Ox et Oy, on peut écrire :
   $\cos\theta(t) = \frac{2x_M}{L}$ $\sin\theta(t) = \frac{2y_M}{L}$
   Soit $[\cos\theta(t)]^2 + [\sin\theta(t)]^2 = 1 = \frac{4x_M^2}{L} + \frac{4y_M^2}{L}$
   $$x_M^2 + y_M^2 = \left[\frac{L}{2}\right]^2$$
   Le milieu M de l'échelle décrit un arc de cercle de rayon (L/2) centré en O.

3. Ne pas oublier que l'angle θ varie en fonction du temps. Vecteur vitesse $\vec{v}_M$ du milieu M de l'échelle.
   $$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\sin\theta \ \frac{d\theta}{dt} & \vec{i} \\ \frac{L}{2}\cos\theta \ \frac{d\theta}{dt} & \vec{j} \end{vmatrix}$$

4. Sachant que : x_B (t) = L cos θ (t), on calcule la vitesse du point B :
   $\frac{dx_B}{dt} = v_0 = -L\sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}$ -> $\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{v_0}{L\sin\theta(t)}$

5. Connaissant l'expression de $\frac{d\theta(t)}{dt}$, on peut exprimer le vecteur vitesse de M :
   $$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{v_0}{2} & \vec{i} \\ -\frac{v_0}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} & \vec{j} \end{vmatrix}$$

   En remarquant que : $\cos\theta = \frac{x_B}{L}$ et $\sin\theta = \frac{z_A}{L} = \frac{\sqrt{L^2 - x_B^2}}{L}$
   $$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{v_0}{2} & \vec{i} \\ -\frac{v_0}{2}\frac{x_B}{\sqrt{L2 - x_B^2}} & \vec{j} \end{vmatrix}$$ soit en module : $\|\vec{v}_M\| = \frac{L.v_0}{2\sqrt{L^2 - x_B^2}}$