FILTRES DE FREQUENCES ACTIFS PASSE-BAS DE BUTTERWORTH[1]

1ère PARTIE : ETUDE THEORIQUE

On appelle filtre de fréquences passe-bas idéal (figure 1), un dispositif excité par une tension d'entrée $v_e = V_{em} \sin(\omega t)$ avec ω variable dont le module de la fonction de transfert est telle que :

$$\left|\underline{T}(j\omega)\right| = \left|\frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}\right| = 1 \quad pour\ \omega < \omega_1$$

$$\left|\underline{T}(j\omega)\right| = 0 \quad pour\ \omega > \omega_1$$

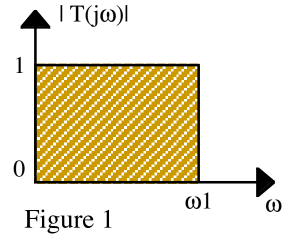


Figure 1

Afin d'établir des résultats valables quelle que soit la valeur de ω_1, on effectue le changement de variable :

$$x = \frac{\omega}{\omega_1} \quad et \quad \underline{s} = j\frac{\omega}{\omega_1} \quad soit : \underline{s} = j\,x$$

Ce filtre idéal est physiquement irréalisable. Butterworth dans les années 30 imagine un filtre passe-bas d'ordre n (n entier > 1) capable d' approcher le filtre idéal. Ce filtre passe-bas d'ordre n possède une fonction de transfert :

$$\underline{T}_n(j\,x) = \frac{1}{\underline{P}_n(j\,x)}$$

où P_n (jx) est un polynôme complexe de degré n tel que le module de la fonction de transfert satisfasse à l'équation :

$$\left|\underline{T}_n(j\,x)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$$

Les polynômes $P_n(s)$ sont donnés dans le tableau suivant pour un ordre n variant de 1 à 6.

n	***Polynômes : $P_n(s)$***
1	$s + 1$
2	$s^2 + \sqrt{2}\,s + 1$
3	$(1 + s)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0{,}765\,s + 1)(s^2 + 1{,}848\,s + 1)$
5	$(1 + s)(s^2 + 0{,}618\,s + 1)(s^2 + 1{,}618\,s + 1)$
6	$(s^2 + 0{,}518\,s + 1)(s^2 + 1{,}414\,s + 1)(s^2 + 1{,}932\,s + 1)$

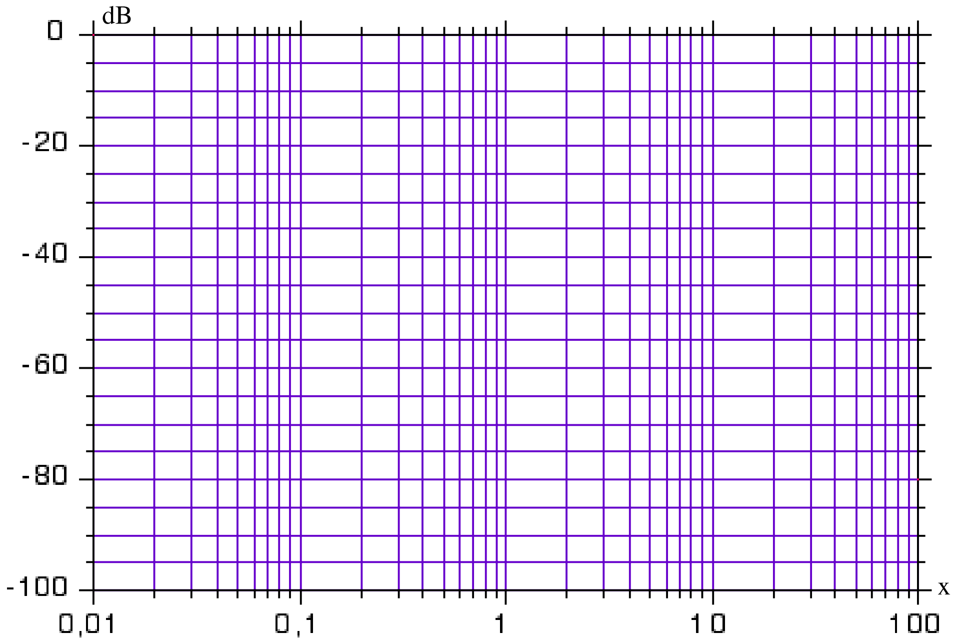
1.1) Calculer pour n =1, 2 et 3 le module des polynômes $P_n(s)$ en fonction de x. Vérifier la propriété du module de la fonction de transfert $|T_n(jx)|$.

1.2) Exprimer en décibels la fonction $|T_n(jx)|$ du filtre et montrer que la pulsation de coupure ω_1 à - 3 dB est indépendante du degré n du polynôme.

1.3) Tracer le graphe asymptotique de Bode de $|T_n(jx)|$ pour n = 1, 2, 3 et 4. A cet effet, on déterminera le coefficient directeur des asymptotes et l'on montrera que pour n -> ∞, on se rapproche du filtre idéal.

---

[1] Ph.ROUX©2006 philippe.roux.7@cegetel.net



2ème PARTIE : REALISATION DES FONCTIONS DU 1° ET DU 2° ORDRE

Il est possible de réaliser les fonctions de transfert d'ordre 1 et 2 des filtres de Butterworth avec les montages suivants qui utilisent des amplificateurs opérationnels idéaux fonctionnant en régime linéaire.

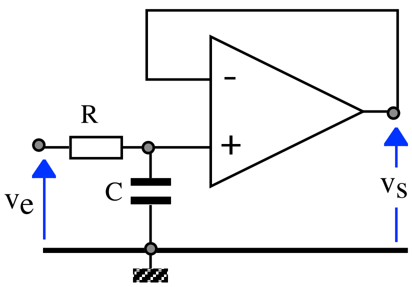


Figure 2: filtre passe-bas 1°ordre

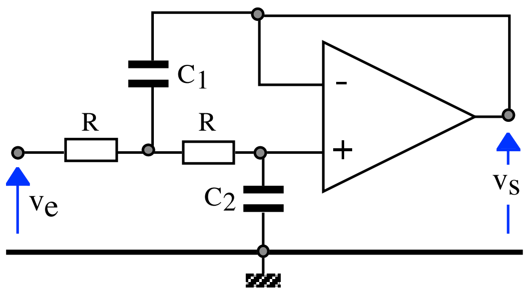


Figure 3: filtre passe-bas 2°ordre

2.1) Montrer que le montage de la figure 2 réalise la fonction du premier ordre (n = 1) : $T_1(jx)$.

2.2) Déterminer la pulsation de coupure ω_1 (à -3 dB) du filtre du 1° ordre en fonction de R et C.

On utilise le montage de la figure 3 pour réaliser la fonction du deuxième ordre $T_2(jx)$ donnée sous la forme générale :

$$T_2(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + 2jmx}$$

m représentant le coefficient d'amortissement et $x = \omega / \omega_1$.

2.3) Déterminer l'expression de la fonction de transfert $T_2(jx)$ du montage de la figure 3 en fonction de ω, R, C_1 et C_2.

2.4) En déduire par <u>comparaison</u> avec la forme générale de $T_2(jx)$ indiquée plus haut, l'expression :

a) de la pulsation de coupure ω_1 en fonction de R, C_1 et C_2.

b) du coefficient d'amortissement m en fonction de C_1 et C_2.

2.5) En remarquant que les filtres de Butterworth du 1° et du 2° ordre ont la même pulsation de coupure ω_1 (question 2 de la 1° partie), exprimer les capacités C_1 et C_2 en fonction du coefficient d'amortissement m et de la capacité C du filtre du 1° ordre (figure 2).

3 ème PARTIE : REALISATION D'UN FILTRE PASSE-BAS DE BUTTERWORTH

On désire réaliser un filtre actif passe-bas dont le graphe de Bode est compris à l'intérieur du gabarit donné en figure 4 sachant que les zones hachurées sont interdites.

La fréquence de coupure f_1 (à -3 dB) du filtre est égale à 2 KHz et l'on désire qu'à la fréquence f_2 égale à 5KHz, l'atténuation soit au moins égale à -39dB.

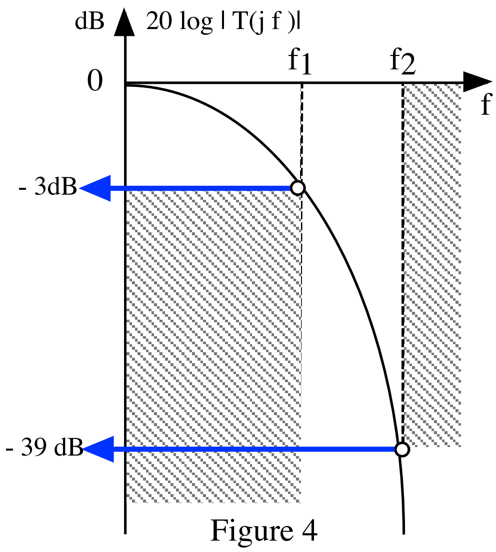


Figure 4

3.1) En utilisant le résultat de la question 2 de la 1°partie. Montrer que l'ordre n du filtre satisfaisant au gabarit doit être égal à 5 (on rappelle que n est un entier).

L'analyse du tableau donnant l'expression des polynômes de Butterworth P_n (s) montre que la réalisation d'un filtre d'ordre n est obtenue par la mise en cascade de filtres :

- *Du 1° ordre et du 2° ordre pour n impair supérieur à 1*
- *Du 2° ordre uniquement lorsque n est pair.*

Pour réaliser le filtre passe-bas proposé d'ordre n = 5, on doit donc mettre en cascade un filtre du 1° ordre =et deux filtres du 2° ordre comme indiqué en figure 5.
Chaque cellule utilise des résistances ***R = 5,3 kΩ*** *(série E 192)*

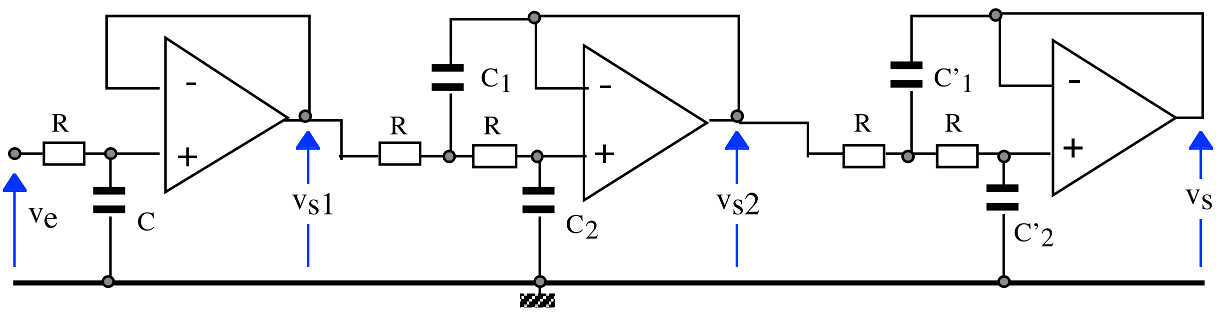


Figure 5

3.2) Calculer la valeur à donner aux capacités du montage afin que la courbe de réponse du filtre soit conforme au gabarit de la figure 4.
Quelle contrainte technique est imposée pour le choix des capacités du montage?

CORRECTION

1ère PARTIE : ETUDE THEORIQUE

1.1) Il est facile de vérifier la propriété du module de la fonction de transfert, en effet :

$|1-jx| = 1+x^2$ soit : $|T_1(jx)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\left|1-x^2+j\sqrt{2}x\right| = (1-x^2)^2+2x^2 = 1+x^4$ soit $|T_2(jx)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

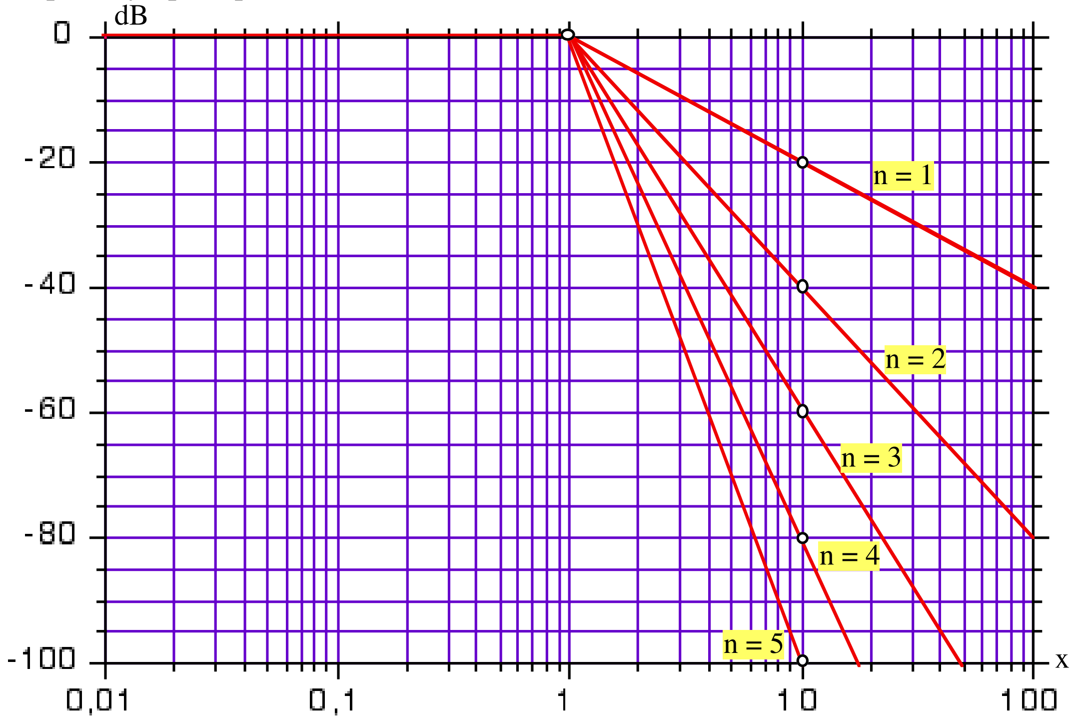
Et ainsi de suite…

1.2) Expression en déciBel du module de la fonction de transfert.

$$|T_n(jx)|_{dB} = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}\right] = -10\log(1+x^{2n})$$

La pulsation de coupure à -3 dB correspond à $x^{2n}=1$ qui a pour solution : x =1 soit $\omega = \omega_1$ quelle que soit la valeur du polynôme n.

1.3) Graphe asymptotique de Bode.

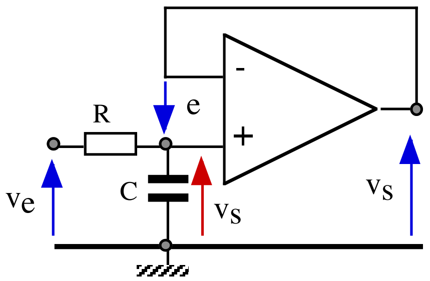


$$|T_n(jx)|_{dB} = -10\log(1+x^{2n})$$

Un filtre d'ordre n conduit à une asymptote de (–20.n) déciBels par décade. Pour n important, on se rapproche du filtre idéal.

2ème PARTIE : REALISATION DES FONCTIONS DU 1° ET DU 2° ORDRE

2.1) Filtre passe-bas du premier ordre.



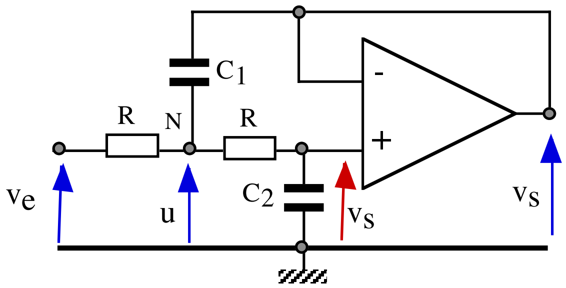
La tension v_s est recopiée aux bornes du condensateur C (e = 0V).

Diviseur de tension : $v_s = v_e \dfrac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = v_e \dfrac{1}{1 + j\omega RC}$

$$\boxed{\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}}$$

2.2) Fréquence de coupure : $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{RC}}$

2.3) A nouveau, la tension v_s est recopiée sur l'entrée + de L'AOP.



Equation au nœud N : $\dfrac{v_e - u}{R} + \dfrac{v_s - u}{R} + (v_s - u)\,j\omega C_1 = 0 \qquad (1)$

Diviseur de tension : $v_s = u \dfrac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R + \frac{1}{j\omega C_2}} = u \dfrac{1}{1 + j\omega RC_2}$ (2) soit : $u = v_s(1 + j\omega RC_2)$

On reporte l'expression de la tension u dans l'équation (1) :

$$\boxed{\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 - \omega^2 R^2 C_1 C_2 + 2j\omega C_2 R}} \quad (3)$$

2.4) La comparaison de la relation (3) avec $T_2(jx) = \dfrac{1}{1 - x^2 + 2jmx}$ permet d'obtenir :

a) La pulsation de coupure : $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}}$

b) Le coefficient d'amortissement : $\boxed{m = \sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}}$

2.5) L'identité de la pulsation de coupure permet d'écrire : $\omega_1 = \dfrac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} = \dfrac{1}{RC}$ soit : $C^2 = C_1C_2$

Sachant que : $m^2 = \dfrac{C_2}{C_1}$, on obtient finalement : $\boxed{C_2 = mC \qquad C_1 = \dfrac{C}{m}}$

3 ème PARTIE : REALISATION D'UN FILTRE PASSE-BAS DE BUTTERWORTH

3.1) Pour la fréquence réduite : $x = \dfrac{f_2}{f_1} = 2{,}5$, on doit obtenir : $|T_n(jx) = -39dB|$. On a donc la relation : $-39 = -10\log\left[1 + 2{,}5^{2n}\right]$ qui a pour solution : n = 4,9 soit n = 5.

3.2) Avec R = 5,3 kΩ, calculons la valeur des capacités.

Exprimons le polynôme d'ordre 5 : $P_5(jx) = (1 + jx)(1 - x^2 + 0{,}618\,jx)((1 - x^2 + 1{,}618\,jx))$

- La fréquence de coupure à –3 dB du filtre du 1° ordre est : f_c = 2 kHz. Sachant que : $f_c = \dfrac{1}{2\pi RC}$, on en déduit la valeur de la capacité C = 15 nF.

- Le coefficient d'amortissement m_1 du 1° filtre du 2° ordre est égal à 0,309. On en déduit alors : C_2 = 4,63 nF et C_1 = 48,5 nF.

- Le coefficient d'amortissement m_2 du 2° filtre du 2° ordre est égal à 0,809. On en déduit alors : C_2 = 12 nF et C_1 = 18,5 nF.

Les capacités doivent posséder une valeur proche de la valeur normalisée habituelle.