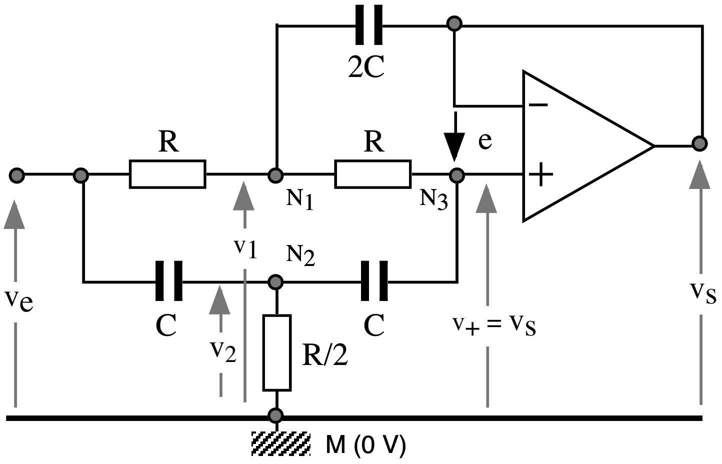
FILTRE REJECTEUR (ELIMINATEUR) DE FREQUENCE

On appelle filtre réjecteur de fréquence (ou coupe-bande) un montage ayant pour rôle de laisser passer certaines fréquences et d'empêcher le passage des autres. Le montage suivant qui utilise un amplificateur opérationnel idéal réalise un tel filtre.
La tension d'entrée v_e est sinusoïdale : $v_e = V_{em} \sin(\omega t)$.



(1) Ecrire l' équation au noeud N_1. En déduire l'expression de la tension v_1 en fonction des tensions v_e et v_s en faisant apparaître la constante de temps $\tau = RC$.

(2) Ecrire l'équation au noeud N_2. En déduire l'expression de la tension v_2 en fonction des tensions v_e et v_s en faisant apparaître la constante de temps $\tau = RC$.

(3) Ecrire l'équation au noeud N_3 en faisant apparaître la constante de temps $\tau = RC$.

(4) Montrer alors que la fonction de transfert $\underline{T}(\omega) = \dfrac{v_s}{v_e}$ du filtre peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{\underline{T}(\omega) = \frac{1-\omega^2\tau^2}{1-\omega^2\tau^2 + j\,2\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\dfrac{2\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}}}$$

On se propose maintenant d'étudier le module de la fonction de transfert $\left\|\underline{T}(\omega)\right\|$.

(5) Déterminer la valeur particulière de la pulsation ω_0 pour laquelle $\left\|\underline{T}(\omega_0)\right\| = 0$

(6) Pour ω tendant d'une part vers zéro puis d'autre part vers l'infini, déterminer la limite du module de la fonction de transfert. Tracer l'allure de la courbe de réponse du filtre réjecteur.

(7) Les résultats de l'analyse mathématique de la question précédente peuvent être retrouvés à partir du schéma du montage. A cet effet, dessinez deux schémas (l'un pour ω tendant vers zéro et l'autre pour ω tendant vers l'infini).
Analyser les schémas et retrouvez les solutions de la question 6.

CORRECTION

Q_1 : Equation au nœud N_1 :

$$\frac{v_e - v_1}{R} + \frac{v_s - v_1}{R} + (v_s - v_1)2j\omega C = 0$$

Soit :

$$\boxed{2v_1 = \frac{v_e}{1 + j\omega\tau} + vs\frac{1 + 2j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}} \quad (1)$$

Q_2 : Equation au nœud N_2 :

$$(v_e - v_2)j\omega C + (v_s - v_2)j\omega C - \frac{2}{R}v_2 = 0$$

Soit :

$$\boxed{2v_2 = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}(v_e + v_s)} \quad (2)$$

Q_3 : Equation au nœud N_3 :

$$\frac{v_1 - v_s}{R} + (v_2 - v_s)j\omega C = 0$$

Soit en développant :

$$\boxed{v_1 - v_s(1 + j\omega\tau) + v_2 j\omega\tau = 0} \quad (3)$$

Q_4 : On reporte les expressions de v_1 (1) et v_2 (2) dans la relation (3) :

Il vient alors après développement :

$$\boxed{T(\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1 - \omega^2\tau^2}{1 - \omega^2\tau^2 + j2\omega\tau}} \quad (4)$$

Q_5 : Le module de cette fonction de transfert s'écrit : $\|T(\omega)\| = \dfrac{1 - \omega^2\tau^2}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + (2\omega\tau)^2}}$ (5)

Ce module est nul pour la valeur particulière de la pulsation :

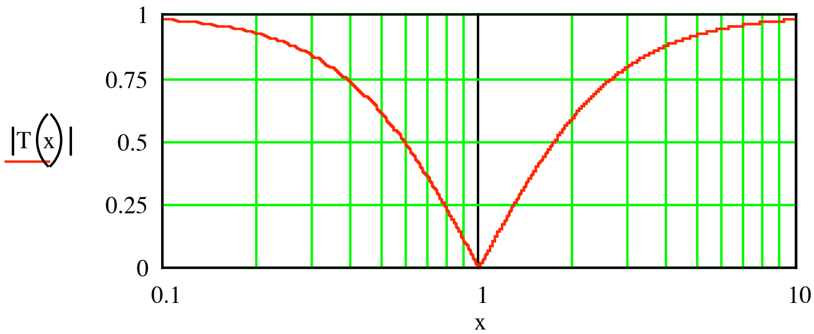
$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}}$$

Qui correspond à la pulsation de réjection du filtre.

Q6 : Lorsque la pulsation ω tend vers zéro, le numérateur et le dénominateur de la relation (5) tendent vers 1. Dans ces conditions $\|T(\omega)\| = 1$ soit 0 dB.

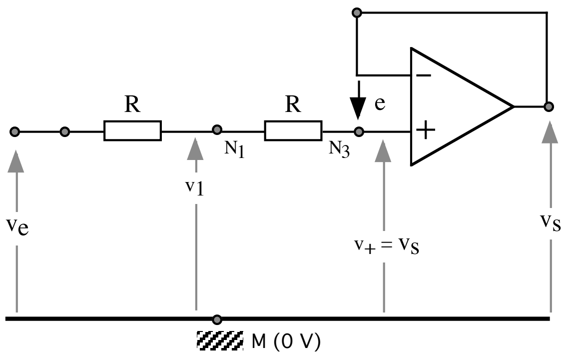
Lorsque ω tend vers l'infini, les termes de plus haut degré sont à prendre en considération à savoir : $(\omega\tau)^2$. Le module de la fonction de transfert tend à nouveau vers 1.

La figure ci-dessous donne la courbe de réponse du filtre en fréquence réduite avec : $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ pour avoir une représentation générale.



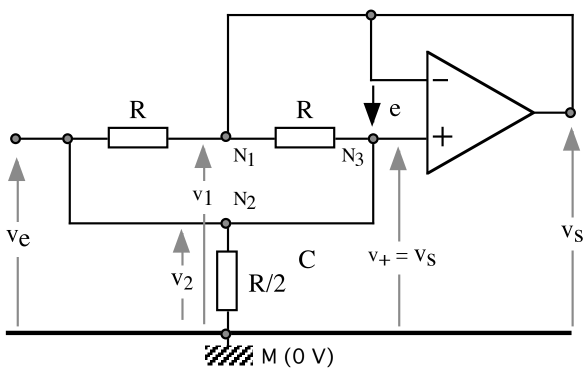
On peut chercher les pulsations de coupures à –3 dB où le module de la fonction de transfert est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. *Pour cela on résout l'équation :* $(\dfrac{2\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2})^2 = 1$ *soit :* $(\dfrac{2\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}) = \pm 1$ *et on ne reteint que les racines positives.*

Q7 : Lorsque ω tend vers zéro, l'impédance des condensateurs tend vers l'infini. Autrement dit on peut les considérer comme des circuits ouverts. Le schéma est alors le suivant :



La tension v_e est alors égale à v_s (pas de courant sur l'entrée +) et le gain de 1.

Au contraire pour ω tendant vers l'infini, l'impédance des condensateurs tend vers 0. Autrement dit on peut les considérer comme des courts-circuits. Le schéma est alors le suivant :



La tension v_e est alors égale à v_s et le gain de 1.