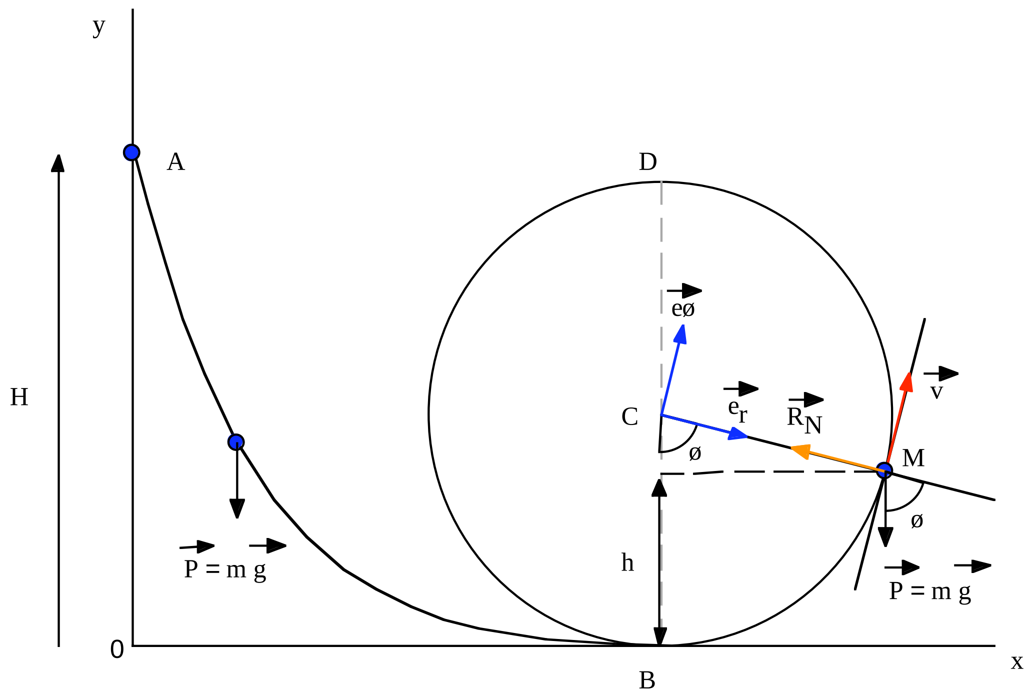
[1]ENERGIE POTENTIELLE ET ENERGIE CINETIQUE

Un mobile M assimilé à un point matériel de masse m se déplace sans frottement sur un rail situé dans un plan vertical. Il est libéré sans vitesse initiale en un point A situé à la hauteur H. Arrivé en B, le rail forme un cercle de centre C et de diamètre BD = 2 r que le mobile parcourt à l'intérieur.
On étudie le mouvement du mobile à l'intérieur de la partie circulaire en supposant qu'il ne quitte pas le rail. A cet effet, nous choisissons un repère constitué par :

- *Le vecteur unitaire* $\vec{e_r}$ *associé au vecteur* $\overrightarrow{CA}$.
- *L'angle* ϕ *entre les vecteurs* $\overrightarrow{CB}$ *et* $\overrightarrow{CA}$.
- *Le vecteur unitaire* $\vec{e_\theta}$ *perpendiculaire à* $\vec{e_r}$.



1. En utilisant le principe de conservation de l'énergie, exprimer à tout instant, la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ du mobile à l'intérieur du cercle et ceci en fonction de :
   - L'angle ϕ
   - La hauteur H, rayon r du cercle et l'accélération g de la pesanteur.

2. Application numérique : H = 3 m, r = 1 m, déterminer les valeurs maximales et minimales de la vitesse et les positions angulaires ϕ correspondantes.

3. Déterminer l'expression de la réaction $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ du support en fonction de : ϕ, mg, H et r. Faire les applications numériques pour les positions angulaires : 0, $\pi/2$ et π.

4. Déterminer la relation liant la hauteur H et le rayon r pour que le mobile puisse effectuer un tour complet de la boucle sans quitter la piste.

[1] Ph.ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

CORRECTION

1. Déterminons l'énergie potentielle et l'énergie cinétique au départ et à l'instant t où le mobile est situé en M et hauteur h sur la partie circulaire.

	Départ	A l'instant t au point A
Energie cinétique	0	$\frac{1}{2}mv^2$
Energie potentielle	$m.g.H$	$m.g.h$

Le principe de conservation de l'énergie permet d'écrire la relation :

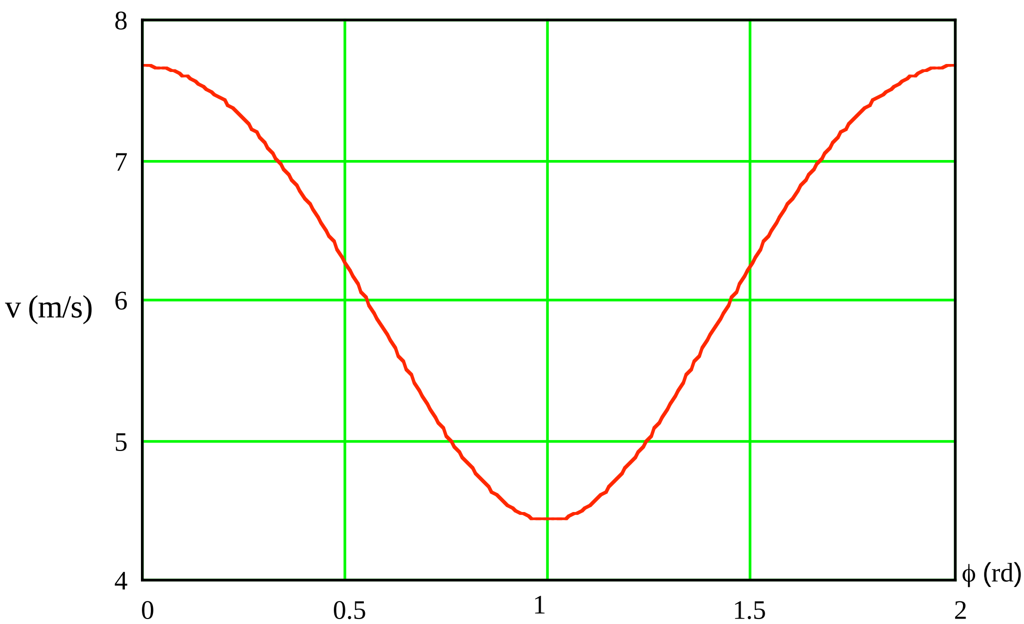
$$\boxed{m.g.H = m.g.h + \frac{1}{2}mv^2}$$

Exprimons la hauteur h en fonction du rayon r du cercle et de l'angle ϕ :
$h = r - r\cos\phi = r(1-\cos\phi)$
Il vient alors :

$$\boxed{v = \sqrt{2g(H - r(1-\cos\phi)}}$$

2. Application numérique :

Angle ϕ	0	$\pi/2$	π
Vitesse	7,67 $m.s^{-1}$	6,26 $m.s^{-1}$	4,43 $m.s^{-1}$



Evolution de la vitesse en fonction de l'angle ϕ

3. Le mobile est soumis à deux forces : son poids et la réaction du support. On écrit donc :

$$\vec{P} + \vec{R_N} = m.\vec{a}$$

Dans son mouvement circulaire, le mobile est soumis à une accélération $\vec{a}$ ayant deux composantes :

- L'accélération tangentielle $\vec{a_t}$ ayant pour norme : $r\dfrac{d^2\phi}{dt^2}$
- L'accélération normale $\vec{a_n}$ de norme : $\dfrac{v^2}{r}$

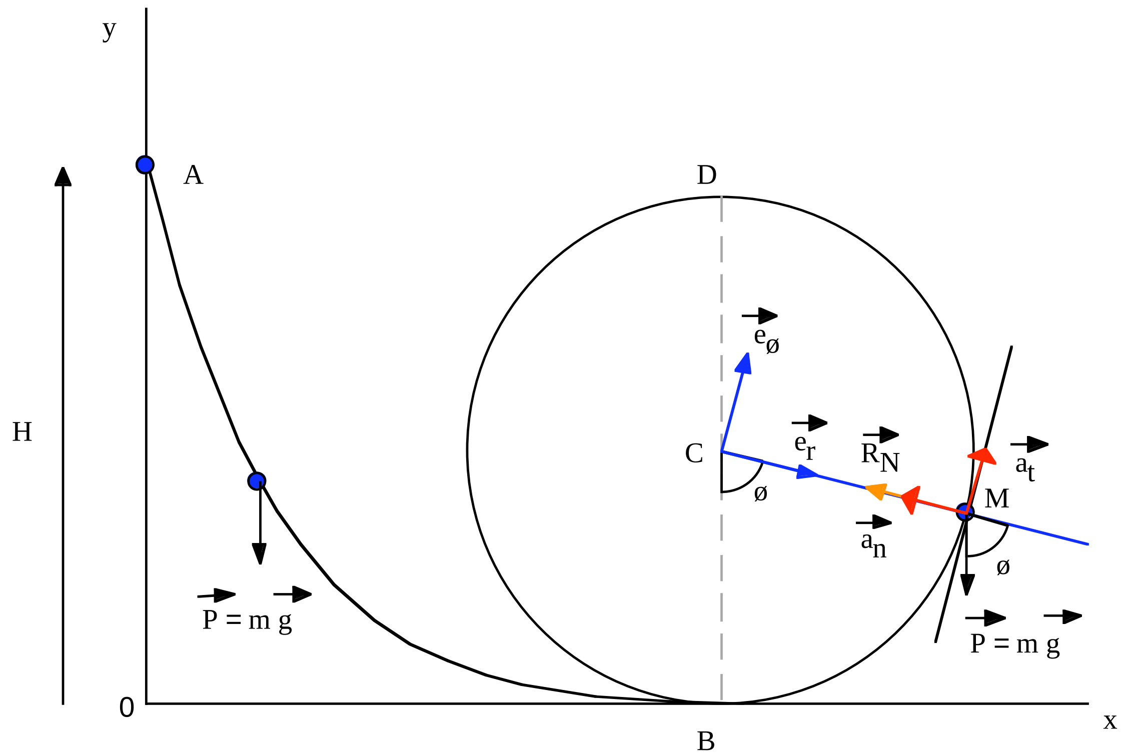
Projetons sur l'axe de vecteur unitaire $\vec{e_r}$: $m.g.\cos\phi.\vec{e_r} - R_N.\vec{e_r} = -m.a_n.\vec{e_r}$. Soit :

$R_N = m.g.\cos\phi + m\dfrac{v^2}{r}$

Compte tenu de l'expression de la vitesse, il vient : $\boxed{R_N = 2.m.g(\dfrac{H}{r} - 1 + \dfrac{3}{2}\cos\phi)}$

Application numérique :

Angle ϕ	0	π/2	π
R_N	7 m.g	4.m.g	m.g



4. On désire que le mobile reste sur la piste, pour cela, le module de la réaction R_N doit être positive, quel que soit l'angle ϕ.

On doit satisfaire à la condition : $(\dfrac{H}{r} - 1 + \dfrac{3}{2}\cos\phi) > 0$, avec : $-1 < \cos\phi < 1$.

La solution acceptable est donc :

$$\boxed{H > \frac{5}{2}r}$$