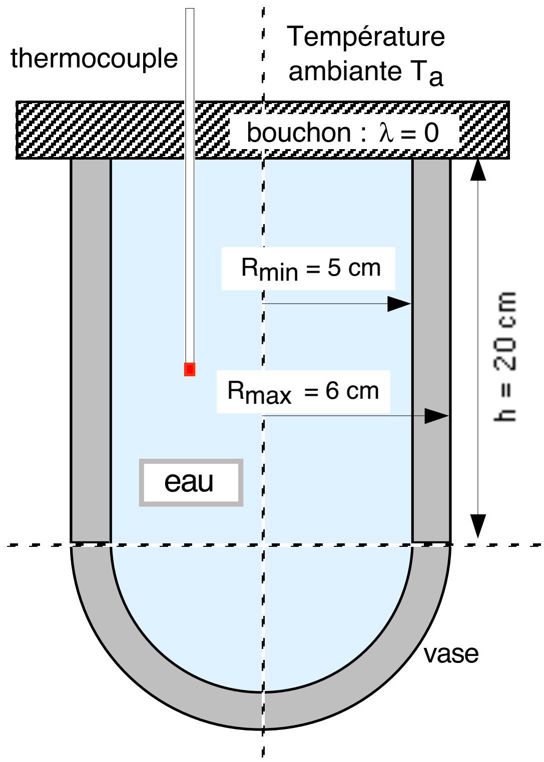
MESURE DE LA CONDUCTIVITE D'UN MATERIAU[1]

On enferme de l'eau à la température initiale $T_{ini} > T_{amb}$ dans un vase dont la forme est représentée ci-dessous. La température de l'eau est mesurée en permanence par un thermocouple. De la loi de décroissance de la température du liquide, on peut accéder à la conductance thermique du vase puis à partir des dimensions géométriques de celui-ci à sa conductivité thermique.



La température ambiante est notée T_a et l'on néglige les pertes par convection du vase avec le milieu extérieur, autrement dit la température extérieure de l'enceinte du vase est égale à T_a.

Calculer le volume intérieur du vase (le volume d'une sphère de rayon R est égal à : $\frac{4\pi}{3}R^3$). En déduire la masse d'eau M (en Kg) contenue dans le vase, sachant que la masse volumique de l'eau est de 1 g cm $^{-3}$.

1ère PARTIE

La température T de l'eau va donc passer de la température T_{ini} à la température T_a. On se propose de trouver la loi d'évolution de T en fonction du temps.

1) On suppose que la conductivité thermique du bouchon est nulle, en conséquence, les échanges thermiques avec le milieu extérieur ne se font que par la paroi latérale et le fond du vase. Pendant la durée infinitésimale dt, la température de l'eau va diminuer de dT.

[1] Philippe ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

a. Déterminer la quantité d'énergie dQ (J) perdue par la masse d'eau M pendant dt en fonction de T, T_a et G_{th} (la conductance thermique du vase).
b. Ecrire l'équation du bilan thermique de la masse d'eau M, on appellera C la chaleur massique de l'eau. En déduire l'équation différentielle d'évolution de la température T (t) et vérifier les unités des termes écrits.
c. Résoudre l'équation différentielle en mettant en évidence la constante de temps τ d'évolution.
d. Tracer l'allure de T (t) en indiquant les valeurs importantes.
e. Par analogie avec l'électricité, donner le schéma thermique équivalent.

A un instant t_1 après le début de l'expérience, on mesure la température T_1 et à un instant suivant t_2 on mesure $T_2 < T_1$.

2) Déduire de ces mesures, l'expression de la conductance G_{th} du vase en fonction de : M, C, t_1, t_2, T_2, T_1 et T_a.

3) Calculer la valeur de G_{th} en W °C^{-1} sachant que : t_1= 1h, t_2 = 2h, T_2 = 69 °C, T_1 = 75 °C, T_a = 30 °C et C = 4,18 J g $^{-1}$ C $^{-1}$.

2ème PARTIE

On se propose maintenant de déterminer la conductivité thermique λ_{th} à partir de G_{th}. Pour cela on décompose le calcul de la résistance thermique en deux parties :

- *R_{th1} résistance de la paroi latérale du vase*
- *R_{th2} résistance du fond du vase*

4) Calculer la résistance thermique R_{th1} de la paroi latérale de hauteur h et de conductivité thermique λ_{th}. Pour faire ce calcul :

- On commencera à écrire la résistance thermique dR_{th1} d'un cylindre de rayon intérieur r et de rayon extérieur (r+dr).

- R_{th1} sera alors obtenue par intégration entre R_{min} et R_{max} (voir figure du dispositif).

5) Calculer la résistance thermique R_{th2} selon la même méthode mais appliquée à une demi sphère.

6) En déduire l'expression de G_{th} en fonction de R_{th1} et R_{th2}.

7) Montrer que G_{th} peut se mettre sous la forme : $G_{th} = K \lambda_{th}$ avec K = 8, 77 m. En déduire, d'après le résultat de Q_3, la conductivité thermique λ_{th} du vase en W °C $^{-1}$ m $^{-1}$

CORRECTION

Volume du vase : V = 1,8 l, masse M = 1,8 Kg.

1ère PARTIE

1)

a. Durant un temps infinitésimal dt, la température de l'eau évolue de T à T – dT. En effet, le vase perd, par conduction thermique, une énergie : $dQ = -G_{th}(T - T_a)dT$

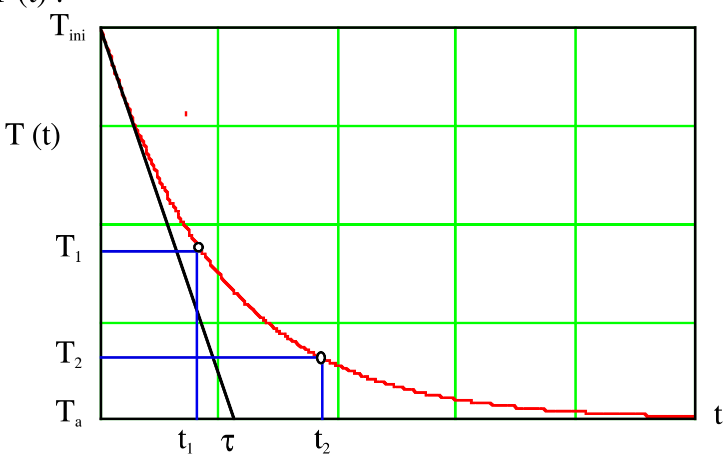
b. Cette perte d'énergie élémentaire provoque une variation de la réserve énergétique de l'eau du vase à savoir : dQ = MC dT.
Bilan thermique : $M.C.dT = -G_{th}(T - T_a)dT$. Soit :

$$\boxed{-\frac{dt}{MC} = \frac{dT}{G_{th}(T - T_a)}}$$

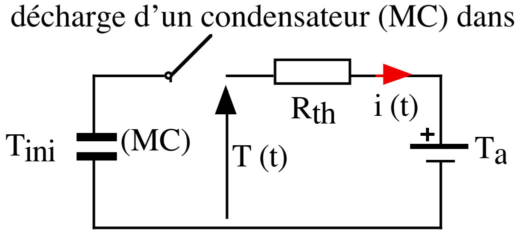
c. Solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$T(t) = T_a - (T_a - T_{ini})\exp(-\frac{t}{\tau}) \qquad \text{avec la constante de temps : } \tau = \frac{MC}{G_{th}}$$

d. Graphe de T (t) :



e. Analogie électrique : décharge d'un condensateur (MC) dans le circuit suivant :



i (t) représente le flux de chaleur.

A la fermeture de l'interrupteur : $i = -MC\frac{dT}{dt}$ -> $\frac{(T - T_a)}{R_{th}} = -MC\frac{dT}{dt}$.

L'équation différentielle est identique à la précédente. T (t) évolue de T_{ini} à T_a avec la constante de temps : $\tau = MCR_{th}$.

2) Recherche de G_{th} à partir de deux points de mesures.

$$T_1 = T_a - (T_a - T_{ini})\exp(-\frac{t_1}{\tau}) \quad -> \quad T_1 - T_a = -(T_a - T_{ini})\exp(-\frac{t_1}{\tau})$$

$$T_2 = T_a - (T_a - T_{ini})\exp(-\frac{t_2}{\tau}) \quad -> \quad T_2 - T_a = -(T_a - T_{ini})\exp(-\frac{t_2}{\tau})$$

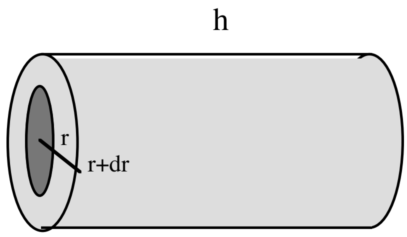
Soit : $\frac{T_1 - T_a}{T_2 - T_a} = \exp(\frac{t_2 - t_1}{\tau})$ -> $t_2 - t_1 = \tau \ln(\frac{T_1 - T_a}{T_2 - T_a})$

$$\boxed{G_{th} = \frac{MC}{t_2 - t_1}\ln(\frac{T_1 - T_a}{T_2 - T_a})}$$

3) Application numérique : $G_{th} = 0{,}3\ W°C^{-1}$.

2ème PARTIE

4) Résistance thermique élémentaire dR_{th1} d'un cylindre de rayon intérieur r et de rayon extérieur (r+dr) et de hauteur h.



$$dR_{th1} = \frac{1}{\lambda_{th} 2\pi h}\frac{dr}{r}$$

Soit : $R_{th1} = \frac{1}{\lambda_{th} 2\pi h}\int_{R\min}^{R\max}\frac{dr}{r} = \frac{1}{\lambda_{th} 2\pi h}[\ln(r)]_{R\min}^{R\max}$ $\quad \boxed{R_{th1} = \frac{1}{\lambda_{th} 2\pi h}\ln(\frac{R_{\max}}{R_{\min}})}$

5) Pour la demi-sphère, la surface d'échange thermique est telle que : $S = 2\pi r^2$. Résistance thermique élémentaire dR_{th2} :

$$dR_{th2} = \frac{1}{\lambda_{th} 2\pi}\frac{dr}{r^2}$$

$R_{th2} = \frac{1}{\lambda_{th} 2\pi}\int_{R\min}^{R\max}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{\lambda_{th} 2\pi}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R\min}^{R\max}$ $\quad \boxed{R_{th2} = \frac{1}{\lambda_{th} 2\pi}(\frac{1}{R_{\min}} - \frac{1}{R_{\max}})}$

6) Sachant que les conductances thermiques s'ajoutent, il vient :

$$\boxed{G_{th} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} = 2\pi\lambda_{th}\left[\frac{h}{\ln\frac{R_{\max}}{R_{\min}}} + \frac{R_{\max}R_{\min}}{R_{\max} - R_{\min}}\right]}$$

7) $K = 2\pi(\frac{h}{\ln\frac{R_{\max}}{R_{\min}}} + \frac{R_{\max}R_{\min}}{R_{\max} - R_{\min}}) = 8{,}77m$ on obtient : $\lambda_{th} = 3{,}41.10^{-2} W°C^{-1}m^{-1}$.