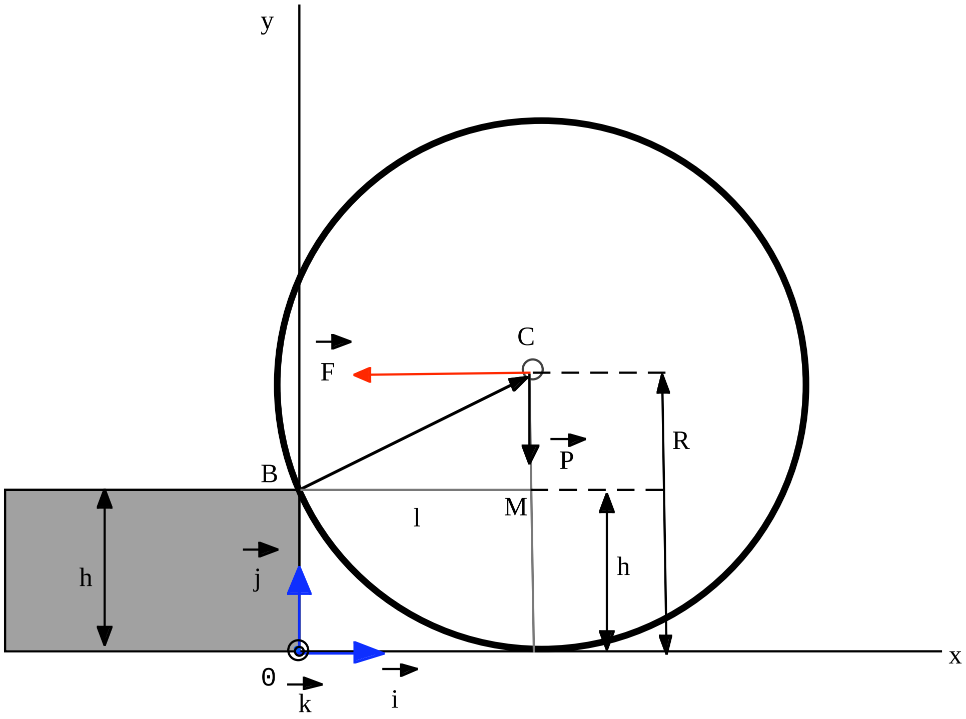
[1] MOMENTS DE FORCES : EXERCICE 1

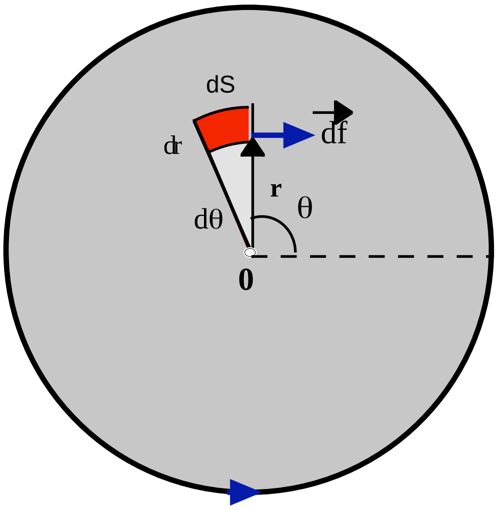
On considère un cylindre de centre C, de rayon R et de poids P qui est bloqué au point B par un obstacle de hauteur h.

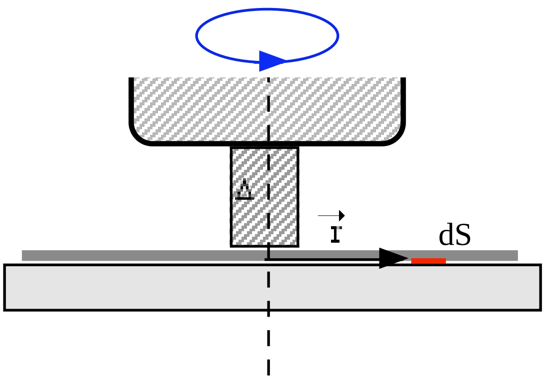


On applique en C, une force $\vec{F}$ horizontale de manière à monter le cylindre sur l'obstacle. Montrer que le module de la force F nécessaire pour tirer un cylindre doit être supérieur à F_{min}. Déterminer l'expression de F_{min} en fonction de P, R et h.
Le repère $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ choisi est indiqué sur la figure.

EXERCICE 2 : PONCEUSE ÉLECTRIQUE

On considère une ponceuse électrique rotative munie d'un disque abrasif de rayon R = 5 cm. Avant de brancher l'appareil sur le secteur 220V, on le pose sur une planche horizontale qui reçoit une force $\vec{F}$ due au poids P de la ponceuse de masse m = 2 Kg (g = 9,81 m s^{-2}).





1. Sachant que le poids de la ponceuse se réparti uniformément sur toute la surface, déterminer l'expression de la force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ qui s'applique sur un élément de surface dS. En déduire la réaction élémentaire $\overrightarrow{dR_N}$ de la surface dS de la planche.

On branche maintenant la ponceuse sur le secteur 220 V (en la maintenant en place et sans appuyer dessus!). L'appareil est alors animé d'un mouvement de rotation circulaire uniforme autour de son axe Δ avec une vitesse angulaire constante ω_0.
Le disque abrasif est caractérisé par un coefficient de frottement constant μ.

2. Déterminer l'expression du module de la force élémentaire de frottement $\overrightarrow{df}$ (s'exerçant sur l'élément de surface dS) en fonction de μ, F, S et dS .

3. La géométrie du disque impose pour des raisons pratiques le choix des coordonnées polaires (r, ϕ). Déterminer l'expression du moment résistant élémentaire dτ de la force de frottement par rapport à l'axe Δ de rotation.

4. En déduire l'expression de la norme du moment $\vec{\tau}$ des forces de frottements pour l'ensemble du disque abrasif en fonction de μ, F et R le rayon du disque.

5. Déterminer la puissance P du moteur de la ponceuse nécessaire à son bon fonctionnement c'est-à-dire avec la vitesse angulaire ω_0 constante.
Faire l'application numérique avec : $\mu = 2{,}4$ et $\omega_0 = 3000$ tours/minute.

CORRECTION EXERCICE 1

1. Exprimons le vecteur $\overrightarrow{BC}$ dans le repère choisi sachant que : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$.

   $\overrightarrow{BM} = \left| \begin{array}{ll} l & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \end{array} \right.$ $\qquad \overrightarrow{MC} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ (R-h) & \vec{j} \end{array} \right.$ $\qquad \overrightarrow{BC} = \left| \begin{array}{ll} l & \vec{i} \\ (R-h) & \vec{j} \end{array} \right.$

   Le triangle rectangle BMC permet d'écrire : $R^2 = l^2 + (R-h)^2$

   $$\boxed{\overrightarrow{BC} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{h(2R-h)} & \vec{i} \\ (R-h) & \vec{j} \end{array} \right.}$$

2. Exprimons les moments $\vec{\tau}_P$ et $\vec{\tau}_F$ des forces $\vec{P}$ et $\vec{F}$ par rapport au point B de rotation du cylindre.

   $\vec{P} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ -P & \vec{j} \end{array} \right.$ $\qquad \vec{F} = \left| \begin{array}{ll} -F & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \end{array} \right.$

   $$\boxed{\overrightarrow{\tau_P} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ -P\sqrt{h(2R-h)} & \vec{k} \end{array} \right.} \qquad \boxed{\overrightarrow{\tau_F} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ F(R-h) & \vec{k} \end{array} \right.}$$

   $\vec{\tau}_P$ et $\vec{\tau}_F$ sont deux vecteurs opposés sur l'axe 0z de vecteur unitaire $\vec{k}$.

   Pour monter le cylindre sur l'obstacle, il faut que $\|\vec{\tau}_F\| > \|\vec{\tau}_P\|$ soit : $\boxed{F_{\min} = P\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}}$

CORRECTION EXERCICE 2

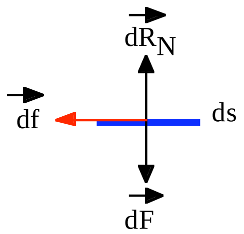
1. Sachant que le poids de la ponceuse s'applique uniformément sur la surface S du disque, un élément dS reçoit une force élémentaire :

$$\left\|\overrightarrow{dF}\right\| = \frac{F}{S}dS\,.$$

   La réaction élémentaire correspondante est telle que : $\left\|\overrightarrow{dR_N}\right\| = \left\|\overrightarrow{dF}\right\|$.

2. Considérons un élément dS du disque caractérisé par son coefficient de frottement μ.

   Par définition : $\mu = \dfrac{\left\|\overrightarrow{df}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dR_N}\right\|}$



   Expression du module de la_force élémentaire de frottement : $\boxed{\left\|\overrightarrow{df}\right\| = \mu F\dfrac{dS}{S}}$

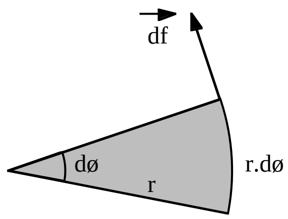
3. Si l'élément de surface dS est situé à la distance $\vec{r}$ du centre 0 du disque, le moment élémentaire $\overrightarrow{d\tau}$ de la force $\overrightarrow{df}$ est défini par la relation : $\overrightarrow{d\tau} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{df}$.
   Ce moment s'oppose au mouvement du disque.
   En coordonnées polaires, l'élément de surface dS est tel que : $dS = r.dr.d\varphi$.
   On obtient donc :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{d\tau}\right\| = \mu\frac{F}{S}r^2 dr d\phi}$$

4. Expression de la norme du moment τ des forces de frottements pour l'ensemble du disque abrasif :

$$\left\|\vec{\tau}\right\| = \frac{\mu F}{\pi . r^2}\int_0^r r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \qquad \boxed{\tau = \frac{2}{3}\mu . F . r}$$

5. Le rôle du moteur est de compenser le moment $\vec{\tau}$ des forces de frottements par un moment opposé et assurer une vitesse angulaire constante.
   Exprimons le travail élémentaire dW effectué par la force de frottement $\overrightarrow{df}$: $dW = r.d\phi.df = \left\|d\tau\right\|d\phi$
   On en déduit la puissance élémentaire correspondante :
   $dP = \left\|d\tau\right\|\dfrac{d\phi}{dt} = \left\|d\tau\right\|.\omega_0$, où ω_0 est la vitesse angulaire de la ponceuse. Finalement la puissance P du moteur est telle que :



$$\boxed{P = \left\|\vec{\tau}\right\|\omega_0 = \frac{2}{3}\mu . m . g . R . \omega_0 = 493W}$$