MOMENTS D'INERTIE[1]

1. Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 qui peuvent se déplacer librement dans le plan sont reliées par une tige rigide de masse négligeable et de longueur a (figure 1).

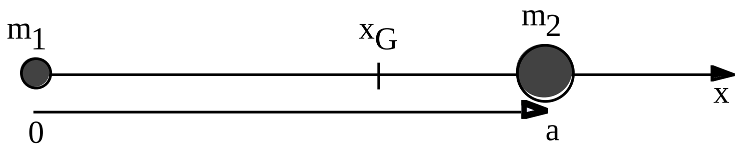


Figure 1

Montrer que le moment d'inertie I du système par rapport à un axe Δ perpendiculaire au plan et passant par le centre de masse x_G est : $I = \mu\, a^2$ où $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ représente la masse réduite.

2. Déterminer le moment d'inertie I_y par rapport à l'axe oy, d'une plaque rectangulaire de densité surfacique σ_S et de côtés a et b (figures 2). Donner l'expression de I_y en fonction de la masse M de la plaque.

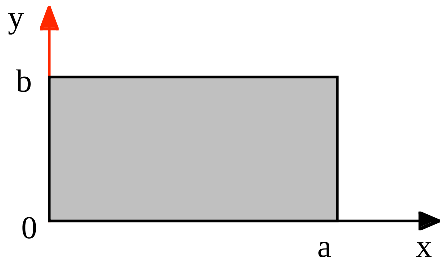


Figure 2

3. En déduire le moment d'inertie I_z de la plaque par rapport à l'axe oz.

4. On considère un disque de rayon R, d'épaisseur e, de masse M et de densité volumique σ_V.

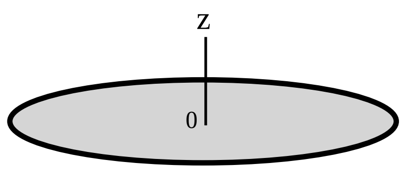


Figure 3

Rechercher le moment d'inertie I du disque par rapport à l'axe 0z passant par le centre de masse du disque et perpendiculaire à ce dernier (figure 3).

5. En déduire le moment d'inertie d'une sphère de rayon R et de masse M (densité volumique σ_V) par rapport à l'axe Δ confondu avec Oz (figure 4).

---
[1] Ph.ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

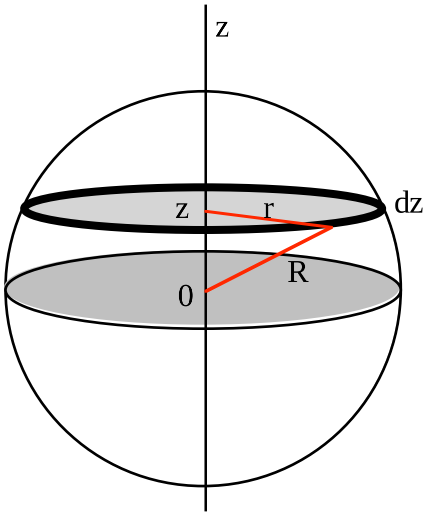
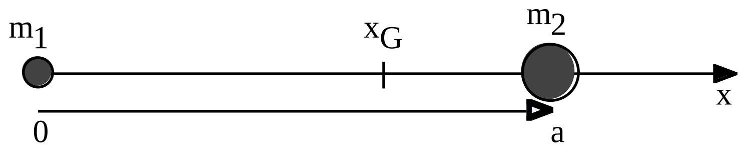


Figure 4

On considérera la sphère (volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$) comme un empilement de disques élémentaires d'épaisseur dz.

CORRECTION

1. On choisi l'origine 0 de l'axe 0x confondue avec la masse m_1.



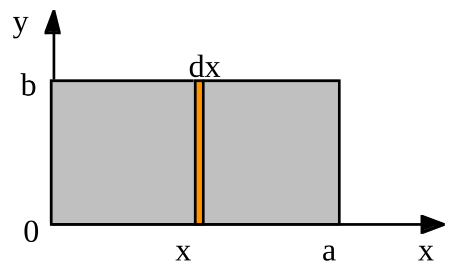
La position x_G du centre de masse est alors telle que : $x_G = \dfrac{m_2.a}{m_1 + m_2}$

Moment d'inertie par rapport à x_G de l'ensemble des deux masses : $I = m_1.x_G^2 + m_2(a - x_G)^2$

On remplace x_G par son expression et en développant il vient :

$$\boxed{I = a^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

2. Considérons un élément élémentaire d'épaisseur dx et de longueur b distant de x de l'axe 0y.



La masse élémentaire associée à l'élément choisi est : $dm = \sigma_S.b.dx$. Il lui correspond le moment d'inertie élémentaire : $dI = dm.x^2$.

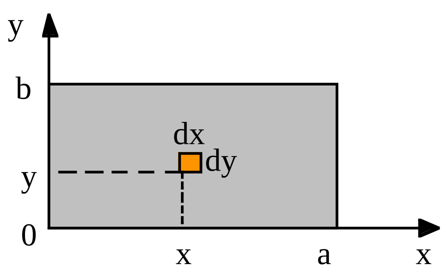
Pour l'ensemble du dispositif, on obtient alors :

$$I = \sigma_S.b\int_0^a x^2 dx = \sigma_S.b\frac{a^3}{3}$$

Sachant que la masse M de la plaque correspond à : $M = \sigma_S ab$,

$$\boxed{I = \frac{1}{3}M.a^2}$$

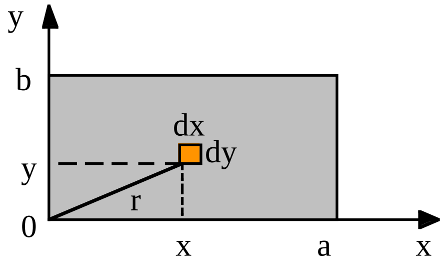
Autre solution en considérant en (x,y) un élément de surface dS = dx.dy et de masse $dm = \sigma_S dxdy$.



Le moment d'inertie élémentaire est tel que : $dI = \sigma_S.dy.x^2dx$. On en déduit :

$$\boxed{I = \sigma_S.\int_0^b dy.\int_0^a x^2dx = \sigma_S.b.\frac{a^3}{3}}$$

3. On se place maintenant selon l'axe 0z. Considérons à nouveau l'élément dS précédent situé à la distance r de l'axe 0z.



Le moment d'inertie élémentaire est alors tel que : $dI_z = r^2dm$, avec : $r^2 = x^2 + y^2$. Soit :

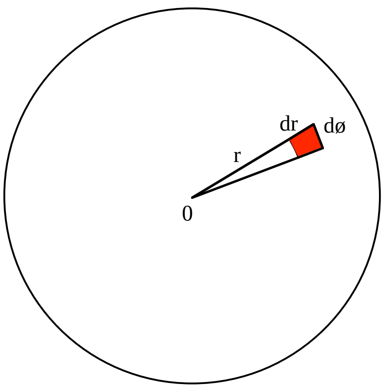
$dI_z = x^2dm + y^2dm$

$dI_z = \sigma_S x^2dxdy + \sigma_S y^2dxdy$

Le calcul du moment d'inertie par rapport à 0z fait appel au calcul respectif du moment d'inertie par rapport à 0y et par rapport à 0x. Par analogie avec le calcul précédent, on obtient :

$$\boxed{Iz = Iy + Ix = \frac{1}{3}Ma^2 + \frac{1}{3}Mb^2}$$

4. Considérons un élément de surface du disque à la distance r du centre 0 et de surface : $dS = dr(rd\theta)$.

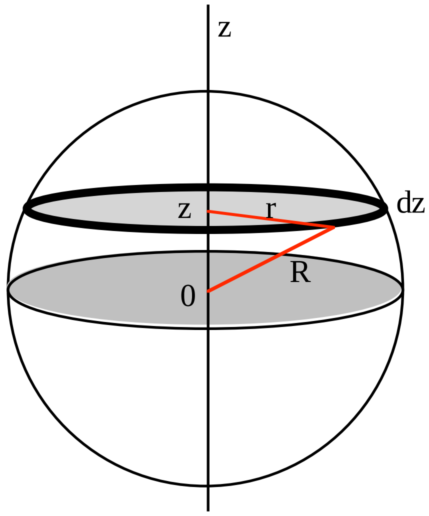


L'élément de masse correspondant : $dm = \sigma_V dr(rd\theta)$ donne un moment d'inertie élémentaire : $dI = r^2dm = \sigma_V dr.r^3d\theta.e$.

$$I = \sigma_V.e\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3dr \qquad I = \sigma_V.e\pi\frac{R^4}{2}$$

En considérant la masse du disque : $M = \sigma_V.e.\pi.R^2$, on obtient : $\boxed{I = \frac{1}{2}MR^2}$

5. Considérons un disque d'épaisseur dz et de rayon r situé à la distance z du centre 0 de la sphère.



Compte tenu de la question précédente, le moment d'inertie élémentaire du disque par rapport à l'axe 0z est tel que : $dI = \frac{\sigma_V}{2}\pi.r^4 dz$.

Avec : $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ soit : $r^4 = (R^2 - z^2)^2$

$$I = \frac{\sigma_V}{2}\pi\int_{-R}^{+R}\left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

On obtient alors : $\boxed{I = \frac{2}{5}MR^2}$