## [1]MOUVEMENT D'UN CYLINDRE SUR UN PLAN INCLINÉ

On considère un cylindre homogène, de rayon R, de hauteur h, de densité volumique $\sigma_V$ et de masse m. Ce cylindre roule sans glisser sur un plan incliné faisant un angle β avec le plan horizontal (figure 1). On désigne par G le centre de masse du cylindre où s'appliquent deux forces :

- Le poids : $\vec{P} = m.\vec{g}$
- La réaction normale du support $\overrightarrow{R_N}$

Le cylindre est soumis à une force de frottement $\vec{f}$ qui s'applique au point de contact B avec le plan incliné.
Initialement le cylindre est immobile en haut du plan incliné où le point M de sa surface est situé à l'origine 0 du référentiel $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. A l'instant t, le point M a tourné d'un angle θ comme indiqué sur la figure 1.

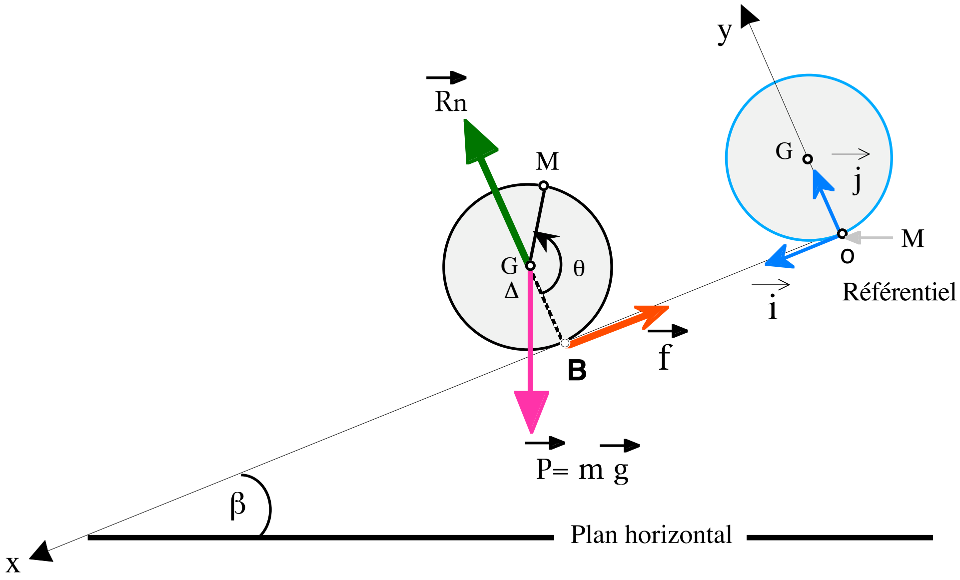



Figure 1

### 1<sup>ère</sup> PARTIE : Analyse de la rotation du cylindre autour de son axe Δ

1. Montrer que le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie Δ est tel que : $I = m\dfrac{R^2}{2}$.
2. Déterminer dans le référentiel $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le moment $\vec{\tau}$ par rapport à l'axe de symétrie Δ du cylindre de la résultante des forces : $\vec{P}$, $\overrightarrow{R_n}$ et $\vec{f}$.

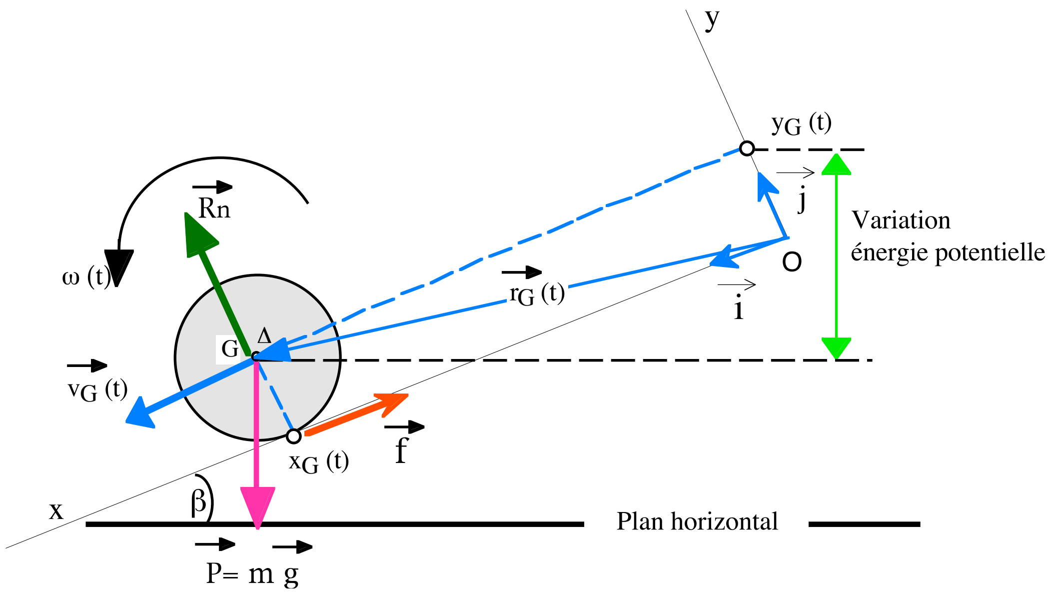
3. En utilisant le <u>théorème fondamental du moment cinétique</u>, déterminer l'expression de l'accélération angulaire α du cylindre en fonction du rayon R, de la force de frottement f et du moment d'inertie I.

4. Donner l'expression de l'énergie cinétique de rotation $E_{c\ rot}$ du cylindre.

[1] Ph.ROUX © 2007 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

**2 ième PARTIE : Analyse du mouvement de translation du centre de masse**

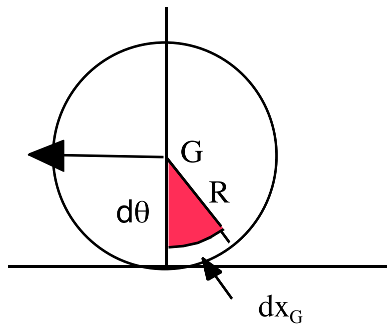
On suppose maintenant que la masse m du cylindre est concentrée au point G. Le vecteur position du centre de masse G est tel que : $\vec{r_G} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j}$.




1. En appliquant le théorème fondamental la dynamique, rechercher les équations des composantes du vecteur accélération $\vec{a_G}$ du centre de masse G sur les axes Ox et Oy.

2. En déduire l'équation du mouvement $y_G$(t) de la projection du centre de masse sur l'axe Oy.

3. Le mouvement de la projection du centre de masse sur l'axe Ox dépend de la force de frottement f. Aussi, il est nécessaire de chercher une relation entre la force f et une caractéristique du mouvement sur l'axe 0x.




   a. Sachant que le cylindre roule sur le plan incliné sans glisser (voir figure ci-dessus), quelle relation lie l'abscisse $dx_G$ du centre de gravité et l'angle dθ ?
   b. En exploitant les résultats des questions de la première partie, montrer que : $f = \frac{1}{2} m.\ddot{x}_G$.

4. Montrer que l'accélération $\ddot{x}_G$ du centre de masse G est constante et ne dépend que de l'accélération g de la pesanteur et de l'angle β du plan incliné. Donner l'expression de $x_G$ (t).

5. Montrer que le coefficient de frottement $\mu$ du cylindre sur le plan incliné doit être au moins égal à (tan β) /3 pour assurer le roulement sans glissement.

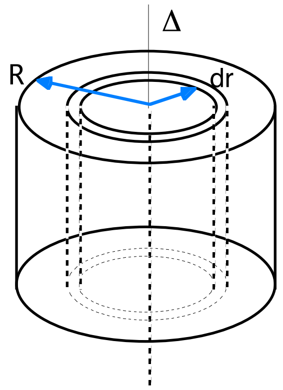
6. Retrouver le résultat de la question 4 de la deuxième partie en utilisant le principe de conservation de l'énergie :

$$\text{variation de } E_{\text{potentielle}} = \text{variation } (E_{C\ \text{rotation}} + E_{C\ \text{translation}})$$

# CORRECTION

## 1° PARTIE : Analyse de la rotation du cylindre autour de l'axe Δ

1. Considérons une portion du cylindre d'épaisseur dr située à la distance r de l'axe de symétrie Δ.




On définit le moment d'inertie élémentaire : $dI = r^2 dm$ où dm représente la masse élémentaire de la portion de cylindre avec : $dm = \sigma_V 2\pi.r.h.dr$. On obtient alors :

$$I = \int_0^R \sigma_V 2\pi.r^3.h.dr \qquad\qquad I = \frac{1}{2}\sigma_V \pi.h.R^4$$

En introduisant la masse m du cylindre : $m = \sigma_V \pi.h.R^2$, il vient : $\boxed{I = \frac{1}{2}m.R^2}$ (1).

2. Les forces $\vec{P}$, $\vec{R_n}$ passent par l'axe Δ, aussi leur moment par rapport à cet axe est nul.
   Pour la force de frottement, on définit le moment : $\vec{\tau} = \overrightarrow{GB} \wedge \vec{f}$ :

$$\overrightarrow{GB} = \left|\begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ -R & \vec{j} \\ 0 & \vec{k} \end{array}\right. \qquad \vec{f} = \left|\begin{array}{ll} -f & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ 0 & \vec{k} \end{array}\right. \qquad \boxed{\vec{\tau} = \left|\begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ -R.f & \vec{k} \end{array}\right.} \quad (2)$$

3. Le théorème fondamental du moment cinétique indique que l'accélération angulaire α est proportionnelle au moment de la résultante des forces responsables de la rotation soit : $\tau = I.\alpha$.

   On obtient donc : $\boxed{\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{R.f}{I}}$ (3)

4. Energie cinétique de rotation $E_{c\ rot}$ du cylindre : $\boxed{E_{C\,rot} = \frac{1}{2}I\omega^2}$ (4)

   Avec une vitesse angulaire : $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{R.f}{I}t + 0$ compte tenu de la condition initiale.

## 2 ° PARTIE : Analyse du mouvement de translation du centre de masse

1. Bilan des forces dans le référentiel choisi :

$$\vec{P} = \left| \begin{array}{l} mg\sin\beta \ \vec{i} \\ -mg\cos\beta \ \vec{j} \\ 0 \ \vec{k} \end{array} \right. \qquad \vec{f} = \left| \begin{array}{l} -f \ \vec{i} \\ 0 \ \vec{j} \\ 0 \ \vec{k} \end{array} \right. \qquad \vec{R_n} = \left| \begin{array}{l} 0 \ \vec{i} \\ R_n \ \vec{j} \\ 0 \ \vec{k} \end{array} \right.$$

Le théorème fondamental la dynamique conduit aux relations suivantes sur les axes Ox et Oy :

- $m\dfrac{d^2x_G}{dt^2} = mg\sin\beta - f$ (5)
- $m\dfrac{d^2y_G}{dt^2} = -mg\cos\beta + R_n = 0$ (6) (Compte tenu du principe d'action réaction).

2. Equation du mouvement $y_G$ (t) de la projection de G sur l'axe Oy.

Sachant que : $m\dfrac{d^2y_G}{dt^2} = 0$, on en déduit avec la condition initiale : $v_G = \dfrac{dy_G}{dt} = 0$ et $y_G(t) = R$.

3. a) Le cylindre roule sur le plan incliné sans glisser, aussi on peut écrire la relation : $dx_G = R.d\theta$. On en déduit : $x_G = R\theta$ (7).

b) De la relation (3) de la première partie, on exprime la force de frottement : $f = \dfrac{I}{R}\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

Cependant, la relation (7) permet d'écrire : $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{1}{R}\dfrac{d^2x_G}{dt^2}$.

Ce qui conduit à l'expression : $f = \dfrac{I}{R^2}\dfrac{d^2x_G}{dt^2}$.

Avec l'équation du moment d'inertie I, on obtient finalement :

$$\boxed{f = \frac{1}{2}m.\frac{d^2x_G}{dt^2}} \ (8)$$

4. La relation (5) : $m\dfrac{d^2x_G}{dt^2} = mg\sin\beta - f$ devient avec l'expression de la force f :

$$\boxed{\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{2}{3}g\sin\beta} \ (9)$$

Il vient alors : $\dfrac{dx_G}{dt} = \dfrac{2}{3}g\sin\beta.t + 0$ $\qquad x_G = \dfrac{2}{6}g\sin\beta.t^2 + 0$

5. On rappelle l'expression du coefficient de frottement : $\mu = \dfrac{\|\vec{f}\|}{\|\vec{R_n}\|}$.

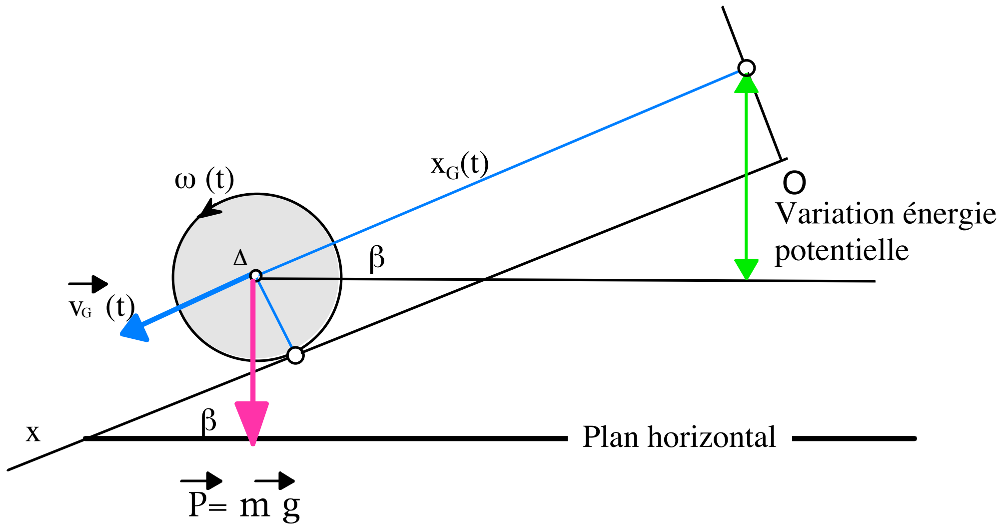
Avec : $R_n = mg\cos\beta$ et compte tenu des résultats précédents, à savoir : $\dfrac{d^2x_G}{dt^2} = \dfrac{2}{3}g\sin\beta$.

Il vient : $f = \dfrac{m}{3}g\sin\beta$.

On en déduit alors la condition que doit satisfaire le coefficient de frottement, pour assurer le roulement sans glissement:

$$\boxed{\mu \geq \frac{1}{3}\tan\beta} \quad (10).$$

6. Supposons que le cylindre est situé à la distance $x_G$ (t) avec une vitesse $v_G$ (t) et une vitesse angulaire ω (t).




Etablissons le bilan énergétique :

- Energie cinétique de translation : $E_{Ctrans} = \frac{1}{2}mv_G^2$
- Energie cinétique de rotation : $E_{Crot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
- Variation de l'énergie potentielle : $\Delta E_p = mg.x_G.\sin\beta$

La conservation de l'énergie conduit à la relation : $\boxed{\Delta E_p = E_{C\,tran} + E_{C\,rot}}$

Soit : $\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mg.x_G.\sin\beta \quad (11)$

La relation (7) permet d'exprimer la vitesse angulaire du cylindre :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dx_G}{dt} = \frac{1}{R}v_G$$

La relation (11) devient avec la relation (1) du moment d'inertie :

$$v_G^2 = (\frac{dx_G}{dt})^2 = \frac{4}{3}gx_G\sin\beta$$

Soit en dérivant par rapport au temps :

$$2\frac{dx_G}{dt}\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{4}{3}g\frac{dx_G}{dt}\sin\beta$$

On retrouve la relation (9) : $\boxed{\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{2}{3}g\sin\beta}$