[1]LANCEMENT D'UNE FUSEE

On considère en figure 1, une fusée ayant une masse totale au départ M_0 et contenant alors, une masse de carburant M_C telle que : $M_C = 0.8\ M_0$ (1) avec $M_0 = 12$ tonnes.

La propulsion de la fusée est assurée par éjection de gaz à haute température, issus de la combustion de propergol à travers une tuyère avec un débit massique D_m constant :

$$\boxed{D_m = \left|\frac{dM_C(t)}{dt}\right| = 120 Kg.s^{-1}} \quad (1)$$

Cette combustion entraîne une évolution de la masse de la fusée telle que :

$$\boxed{M(t) = M_0 D_M t} \quad (2)$$

Les gaz chauds sortant de la tuyère, avec une vitesse d'éjection constante $\vec{v}_g$ par rapport à la fusée, provoquent alors une force de poussée constante :

$$\boxed{F_P = -D_m \vec{v}_g} \quad (3)$$

avec $v_g = 2400$ m s^{-1}.

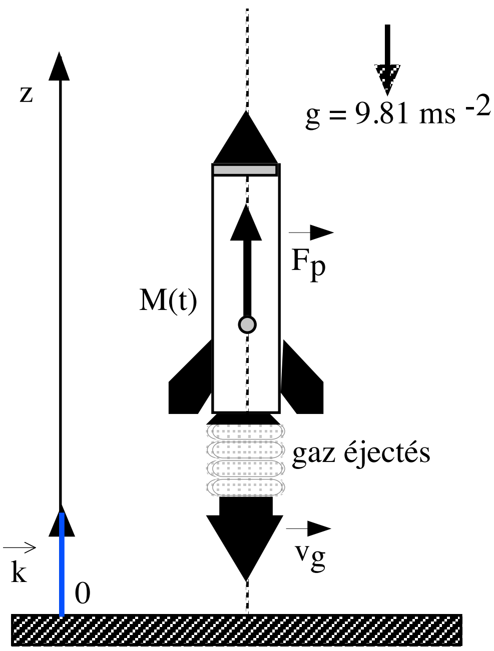

Figure 1

La fusée est lancée verticalement suivant l'axe Oz de vecteur unitaire $\vec{k}$ d'un référentiel considéré comme absolu. L'accélération g de la pesanteur est supposée constante, les forces de frottements sont négligées.

[1] Ph.ROUX © 2007 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

1. Compte tenu du débit massique constant, associé à la combustion du propergol, calculer le temps t_1 nécessaire pour brûler tout le carburant.

2. Le mouvement de la fusée est géré par les équations (2) et (3). En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel choisi, déterminer l'expression de l'accélération $\left\|\overrightarrow{a(t)}\right\|$ de la fusée en fonction de M_0, g, D_m, v_g et du temps t. Faire l'application numérique au départ et en fin de combustion.

3. Etablir l'expression de la vitesse $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\|$. Déterminer la valeur de la vitesse maximale v_{max} en fin de combustion.

4. Calculer l'expression de l'altitude z(t) de la fusée.
   A cet effet, on donne la relation : $\int \ln(u)du = u(\ln(u) - 1)$.
   Calculer l'altitude z_{max} atteinte en fin de combustion.

CORRECTION

1) Calcul du temps t_1 nécessaire pour brûler tout le carburant : $t_1 = \dfrac{M_c}{D_m} = 80s$.

2) Principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F} = M(t)\vec{a}$ soit : $\vec{F_P} + M(t)\vec{g} = M(t)\vec{a}$. En projetant sur l'axe Oz, la relation vectorielle devient : $F_p - M(t)g = M(t)a$
Compte tenu des relations (2) et (3), il vient :

$$\boxed{a = \frac{D_m v_g}{M_0 - D_m t} - g}$$

A.N : Accélération au départ et à l'arrivée : 110,2 m.s^{-2} et 14,2 m.s^{-2}.

3) Recherche de l'expression de la vitesse : $a = \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{D_m v_g}{M_0 - D_m t} - g$.
Résolvons cette équation différentielle du premier ordre :

$$v(t) = -g\ t + D_m v_g \int \frac{dt}{M_0 - D_m t} + Cte$$

$$v(t) = -g\ t - v_g \ln(M_0 - D_m t) + Cte$$

Pour évaluer la constante, on utilise la condition initiale. En effet, à l'instant t = 0, la vitesse est nulle. On en déduit alors : $Cte = v_g \ln(M_0)$.
Expression de la vitesse :

$$\boxed{v(t) = -gt - v_g \ln(1 - \frac{D_m}{M_0} t)}$$

En fin de combustion, la vitesse est telle que : v_{max} = 3077 m.s^{-1}.

4) Calcul de l'expression de l'altitude z(t) de la fusée : $v(t) = \dfrac{dz(t)}{dt}$.

$$\frac{dz(t)}{dt} = -gt - v_g \ln(1 - \frac{D_m}{M_0} t) \quad \text{soit : } z(t) = -g\int t dt - v_g \int \ln(1 - \frac{D_m}{M_0} t) dt + Cte$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 - v_g \int \ln(1 - \frac{D_m}{M_0} t) dt + Cte$$

On effectue un changement de variable, à savoir : $u = 1 - \dfrac{D_m}{M_0} t$ qui entraîne : $du = -\dfrac{D_m}{M_0} dt$.

$\ln(1 - \dfrac{D_m}{M_0} t) dt$ devient : $-\dfrac{D_m}{M_0} u du$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{v_g M_0}{D_m}\left[1 - \frac{D_m}{M_0} t\right]\left[\ln(1 - \frac{D_m}{M_0} t) - 1\right] + Cte$$

Déterminons la constante d'intégration avec la condition initiale à t = 0 s : $Cte = \frac{v_g M_0}{D_m}$.

Finalement :

$$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_g M_0}{D_m}\left[1 - \frac{D_m}{M_0}t\right]\left[\ln(1 - \frac{D_m}{M_0}t) - 1\right] + \frac{v_g M_0}{D_m}}$$

A.N. z_{max} = 83,35 km.