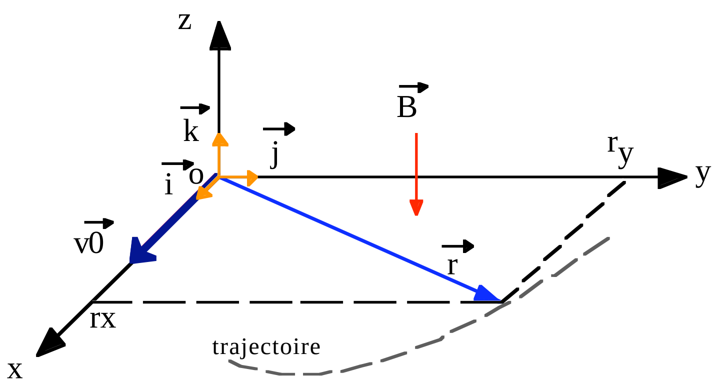
PARTIE 1 : MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME[1]

On rappelle qu'une charge électrique q dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumise à une force :

$$\vec{f} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

On se propose de déterminer le mouvement d'un proton :

- *De charge : q = 1,609 10^{-19} C*
- *De masse m = 1,673 10^{-27} Kg et de poids négligeable.*



A l'instant t = 0 la particule est située à l'origine 0 du référentiel, animée d'une vitesse $\vec{v_0}$ suivant l'axe 0x. Elle se trouve alors soumise à un champ magnétique constant : $\vec{B} = -B_0.\vec{k}$.

1. A un instant t quelconque, montrer que la position $\vec{r}$ de la particule dans le repère choisi, est donnée par les trois équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_c \frac{dy}{dt} \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega_c \frac{dx}{dt} \quad (2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (3)$$

   Où $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ représente la pulsation du mouvement.

2. Montrer que la trajectoire du mobile s'effectue dans le plan x 0 y.

3. Compte tenu de l'équation (2) et des conditions initiales à t = 0, montrer que la position de la particule suivant l'axe 0x est donnée par l'équation différentielle du 2° ordre : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_c^2 x = 0$ qui a pour solution : x = A cos (ω_C t + ϕ) où les constantes A et ϕ dépendent des conditions initiales (position et vitesse).

   a. Déterminer A et ϕ et donner l'expression de la position x (t) de la particule sur l'axe ox.

   b. En déduire l'expression de la position y (t) de la particule selon l'axe oy.

[1] http://rouxphi3.perso.cegetel.net

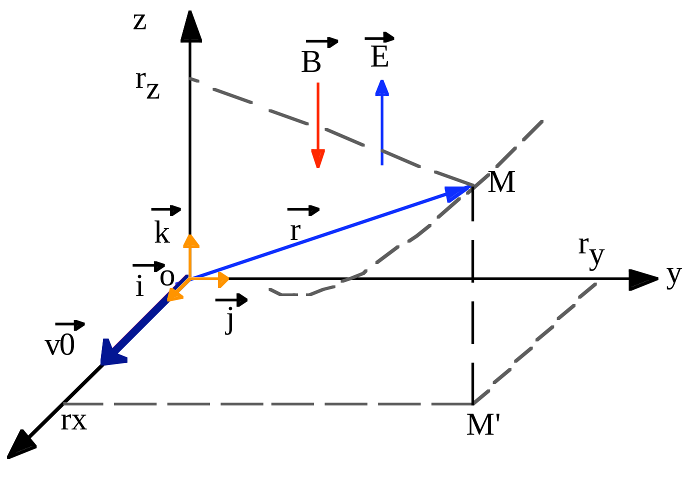
4. Montrer que la particule décrit un cercle de rayon R dont on donnera l'expression et avec une vitesse constante v_0.
    a. Rechercher les coordonnées x_0 et y_0 du centre du cercle.

    b. Vérifier que la vitesse est bien constante en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

    c. Faire les applications numériques sachant que : $v_0 = 2{,}5\ 10^5$ m s^{-1} et $B_0 = 5\ 10^{-4}$ T.

PARTIE 2 : MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE
DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE ET ELECTRIQUE UNIFORMES

Au champ magnétique précédent s'ajoute maintenant l'influence d'un champ électrique $\vec{E}$ constant. Les conditions initiales sont identiques à celles de la première partie et le proton est soumis à la force de Lorentz : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.



5. Établir les trois équations différentielles régissant la position $\vec{r}$ de la particule dans le repère choisi.

6. En exploitant les résultats de la première partie, montrer que la trajectoire de la particule est de type hélicoïdal. Donner la position du proton au bout de trois révolutions à partir de t = 0.
   On donne E_0 = 5V/m.

CORRECTION

1. La force $\vec{f}$ que subit la particule conduit à une accélération $\vec{a}$ telle que : $\vec{f} = m.\vec{a} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

   Dans le repère choisi, faisons le bilan des données :

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ -B_0 & \vec{k} \end{vmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{dt} & \vec{i} \\ \dfrac{dy}{dt} & \vec{j} \\ \dfrac{dz}{dt} & \vec{k} \end{vmatrix} \qquad \vec{f} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \begin{vmatrix} -qB_0\dfrac{dy}{dt} & \vec{i} \\ qB_0\dfrac{dx}{dt} & \vec{j} \\ 0 & \vec{k} \end{vmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} & \vec{i} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} & \vec{j} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

   Les composantes x, y et z du vecteur position $\vec{r}$ de la particule obéissent aux relations suivantes :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_c\frac{dy}{dt} \quad (1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega_c\frac{dx}{dt} \quad (2) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (3)} \qquad \text{Avec : } \omega_c = \frac{qB_0}{m}.$$

2. La relation (3) indique que la vitesse selon l'axe oz : $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ est une constante qui est nulle sachant que la vitesse initiale est telle que : $\vec{v_0} = \begin{vmatrix} v_0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ 0 & \vec{k} \end{vmatrix}$. Sachant de plus qu'initialement la particule se trouve à l'origine du référentiel, la projection du mouvement sur l'axe des z est nul. La trajectoire du mobile s'effectue donc dans le plan x 0 y.

3. La relation (2) indique : $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \omega_c\dfrac{dx}{dt}$. Soit en intégrant : $\dfrac{dy}{dt} = \omega_c x + 0$ (4) car la composante de la vitesse initiale v_0 sur l'axe 0y est nulle.

   En reportant (4) dans la relation (1), il vient : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_c^2 x = 0}$

   qui a pour solution x = A cos (ω_C t + ϕ).

   a) Les conditions initiales permettent de déterminer A et ϕ. En effet :

      $x = A\cos(\omega_c t + \dfrac{\pi}{2})$ ou bien $x = -A\sin(\omega_c t)$.

      $\dfrac{dx}{dt} = -A\omega_c\cos(\omega_c t)$

      Compte tenu de la vitesse initiale, $A = -\dfrac{v_0}{\omega_c}$.

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)} \qquad (5)$$

b) Position de la particule selon l'axe oy.

On exploite la relation (2) avec : $\dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos(\omega_c t)$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = \omega_c v_0 \cos(\omega_c t)$. Soit en intégrant sans oublier de calculer la constante d'intégration pour l'instant initial : $\dfrac{dy}{dt} = -v_0 \sin(\omega_c t) + 0$.

$$\boxed{y = \frac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c}} \quad (6)$$

4. Trajectoire de la particule. Les mouvements sur les axes 0x et 0y sont :

$x = \dfrac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$ et $y = \dfrac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) - \dfrac{v_0}{\omega_c}$

Posons : $Y = y + \dfrac{v_0}{\omega_c}$ de telle manière que : $Y = \dfrac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t)$ (7).

Nous avons alors : $x^2 + Y^2 = (\dfrac{v_0}{\omega_c})^2 = R^2$.

La trajectoire est donc un cercle de rayon $\boxed{R = \dfrac{mv_0}{qB_0}}$

a) Coordonnés du centre C du cercle : $x_0 = 0 \qquad y_0 = \dfrac{v_0}{\omega_c}$.

b) La vitesse de la particule est constante, en effet : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_0$.
La force $\vec{f}$ qui est perpendiculaire à $\vec{v}$, effectue un travail nul, aussi il n'y a pas de variation de l'énergie cinétique. La vitesse reste donc constante.

c) Application numérique : R = 5,23 m $\qquad \omega_c = 47{,}8\ 10^3$ rd/s.

5. On doit maintenant tenir compte du champ électrique : $\vec{E} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ E_0 & \vec{k} \end{array} \right.$.

La force est alors : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \left| \begin{array}{ll} -qB_0 \dfrac{dy}{dt} & \vec{i} \\ qB_0 \dfrac{dx}{dt} & \vec{j} \\ E_0 & \vec{k} \end{array} \right.$

Les équations différentielles qui gèrent le mouvement projeté sur les axes 0x et 0y sont identiques à celles de la première partie. Pour le mouvement projeté sur l'axe 0z, on obtient :

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{q}{m}E_0 = Cte}$$

Le mouvement sur l'axe des z est uniformément accéléré.

6. La trajectoire est donnée à partir des solutions suivantes :

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)} \qquad \boxed{y = \frac{v_0}{\omega_c}\cos(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c}} \qquad \boxed{z = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E_0 t^2}$$

Il s'agit donc d'un mouvement hélicoïdal.

Au bout de trois périodes soit t = 394 μs, la position (en mètres) de la particule est la suivante : $\vec{r} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \vec{i} \\ 0 & \vec{j} \\ 37 & \vec{k} \end{array} \right.$