OSCILLATEUR RLC MUNI D'UNE RESISTANCE NEGATIVE[1]

1ère PARTIE : DIPOLE A RESISTANCE NEGATIVE

On considère le montage de la figure 1 qui utilise un amplificateur opérationnel parfait, alimenté par V_{CC} = +15 V et V_{EE} =-15 V et dont la caractéristique de transfert est représentée en figure 2.

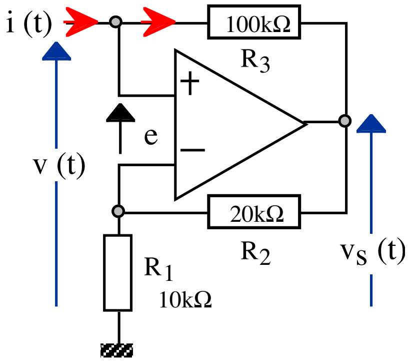


Figure 1

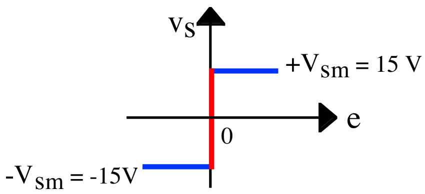


Figure 2

Le montage est excité par une tension $v(t) = V_m \cos(\omega t)$ dont l'amplitude V_m peut varier de 0 à 15V.

1) *On suppose tout d'abord que l'amplitude du générateur v(t), est telle que l'amplificateur fonctionne dans sa zone linéaire définie par e = 0 V c'est à dire : $-15V < V_{sm} > +15V$.*
Calculer dans ces conditions, entre quelles limites V_{e1} et V_{e2} ($V_{e1} < V_{e2}$) peut varier la valeur instantanée du générateur v(t).

2) Déterminer alors, l'expression de la valeur instantanée du courant i(t) en fonction de v(t).
Montrer que la résistance d'entrée R_e du montage est négative, c'est à dire que le <u>montage fournit du courant au générateur</u> v(t).
Donner l'expression de R_e et on écrira $R_e = - R_n$ avec R_n positive. Faire l'application numérique.

On suppose maintenant que le générateur v(t) évolue entre -15 et +15 V, de telle façon que l'amplificateur A_0 puisse sortir de sa zone de linéarité et entrer en saturation.

3) Dans ces conditions, déterminer l' expression du courant i(t) lorsque :

- $-15 < v(t) < -5$ V
- $5 \text{ V} < v(t) < +15$ V

La figure 3 illustre les résultats de l'analyse précédente.

---

[1] ©Ph. Roux 2005

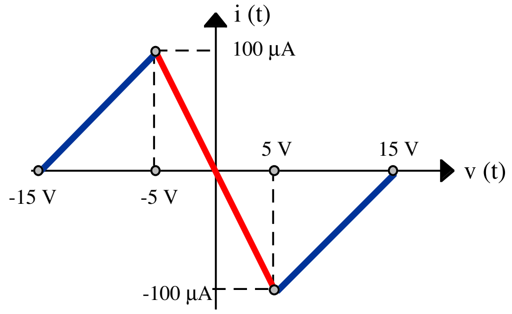


Figure 3

$2^{\text{ème}}$ PARTIE : CREATION D'OSCILLATIONS SINUSOIDALES

Le montage précédent, représenté par le dipôle A M, est associé au circuit oscillant R L C de la figure 4. Initialement, l'interrupteur K_1 est en position 1 et K_2 ouvert.
A l'instant t = 0, K_1 passe en position 2 et <u>simultanément</u>, on ferme K_2.

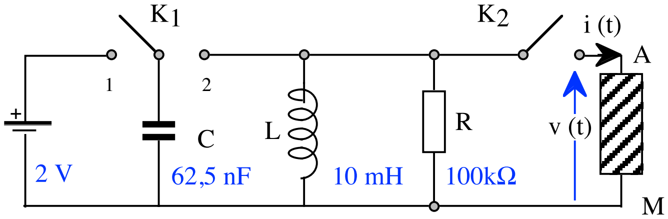


Figure 4

On suppose tout d'abord que l'amplitude de v(t) est inférieure à 5 V, le dipôle AM présente alors une résistance négative.

1) Etablir l'équation différentielle du 2° ordre à 2° membre nul que vérifie la tension v(t) en posant :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad et \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(-R_n)}$$

2) Résoudre <u>numériquement</u> l'équation caractéristique de l'équation dont la solution s'écrit :

$$v(t) = e^{\alpha t}\left[A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)\right] \;...\; (1)$$

Où A_1 et A_2 sont des constantes dépendantes des conditions initiales.

Calculer la valeur du coefficient α et montrer que : $\beta \approx \omega_o$

3) Déterminer les constantes A_1 et A_2 de l'équation 1 compte tenu des conditions initiales.

On portera son attention sur la valeur de $\dfrac{dv(t)}{dt}$ à l'instant t = 0.

Donner l'expression approchée de v (t) dont le graphe est donné en figure 5.

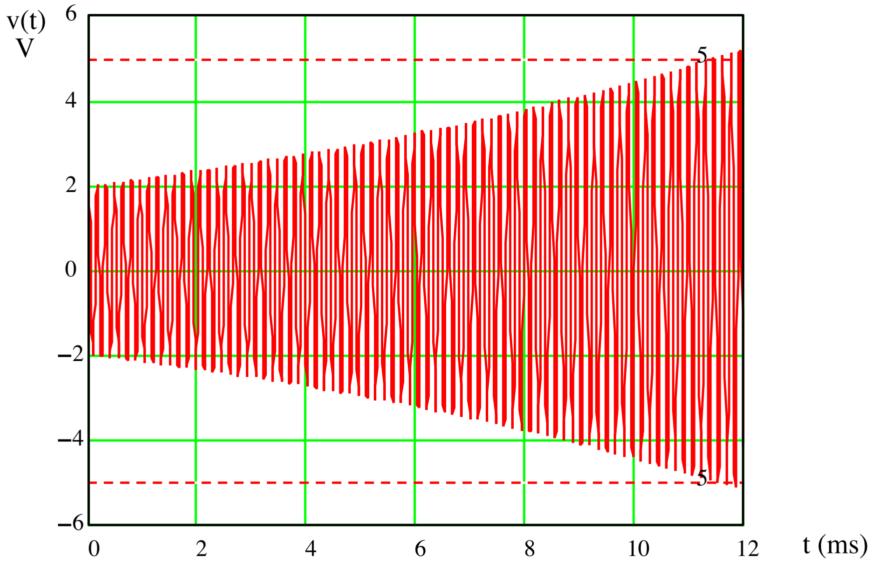


Figure 5

4) Calculer le temps t_1 au bout duquel l'amplitude de v(t) atteint une valeur telle que l'amplificateur se situe alors à la limite de son fonctionnement linéaire.

5) Sachant que durant une pseudo période, l'amplitude de v(t) varie peu, calculer <u>l'énergie</u> W_F <u>fournie par le dipôle AM durant une période T</u>, c'est à dire :

$$W_F = \int_0^T \frac{v^2(t)}{R_n}\, dt \quad \text{où :}$$

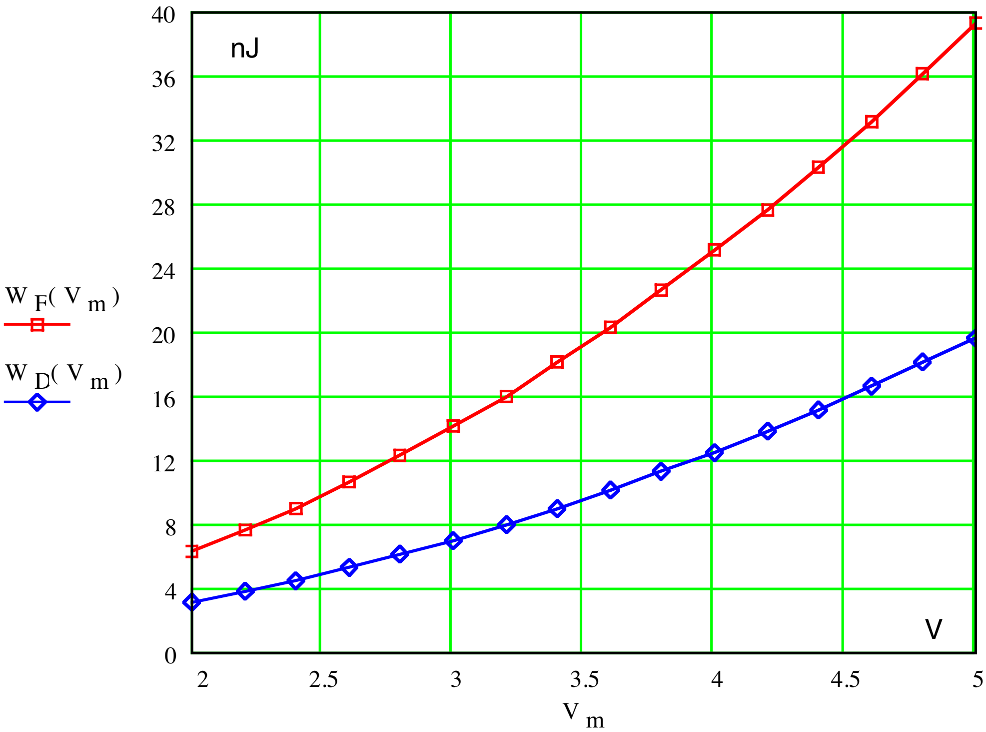
$$v(t) = V_m \cos(\omega_0\, t)$$

6) Calculer <u>l'énergie</u> W_D <u>dissipée et donc perdue durant une période T de la tension v(t) dans la résistance R</u> du circuit oscillant sachant que :

$$W_D = \int_0^T \frac{v^2(t)}{R}\, dt \quad \text{où :}$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega_0\, t)$$

Faire les applications numériques pour V_m variant de 2 à 5 V. Les graphes correspondants sont donnés ci-dessous.



3 ^{ème} PARTIE : STABILISATION DE L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

Le graphe précédent indique que l'énergie reçue durant une période est supérieure à l'énergie dissipée dans la résistance R.
L'expérience montre alors qu'à partir du temps t_1, la tension v(t) suit encore une loi de la forme : $v(t) = V_m \cos(\omega_0 t)$, où l'amplitude V_m de la tension v(t) continue à croître puis se stabilise à une valeur V_{m0} qu'on se propose de déterminer.
Dans ces conditions, l'expression de W_D calculée en question (6) est encore utilisable.

Au contraire, comme il est indiqué en figure 6, lorsque l'amplitude de la tension v(t) est supérieure à 5 V, le calcul de la participation énergétique sur une période du dipôle AM comprend plusieurs séquences :

- *Des instants t = O à t_2 lorsque V_m est supérieure à 5V, le dipôle AM dissipe de l'énergie car sa résistance d'entrée est positive.*

- *De l'instant t_2 à T/4, le dipôle AM fournit de l'énergie (sa résistance d'entrée est négative) et ainsi de suite sur la période T. On écrira donc :*

$$W_F = 4\left[-\int_0^{t_2} v(t)\, i(t)\, dt + \int_{t_2}^{\frac{T}{4}} \frac{v^2(t)}{R_n}\, dt\right]$$

$$\text{où} \quad v(t) = V_m \cos(\omega_0 t)$$

$$i(t) = \frac{v(t) - V_{sm}}{R_3}$$

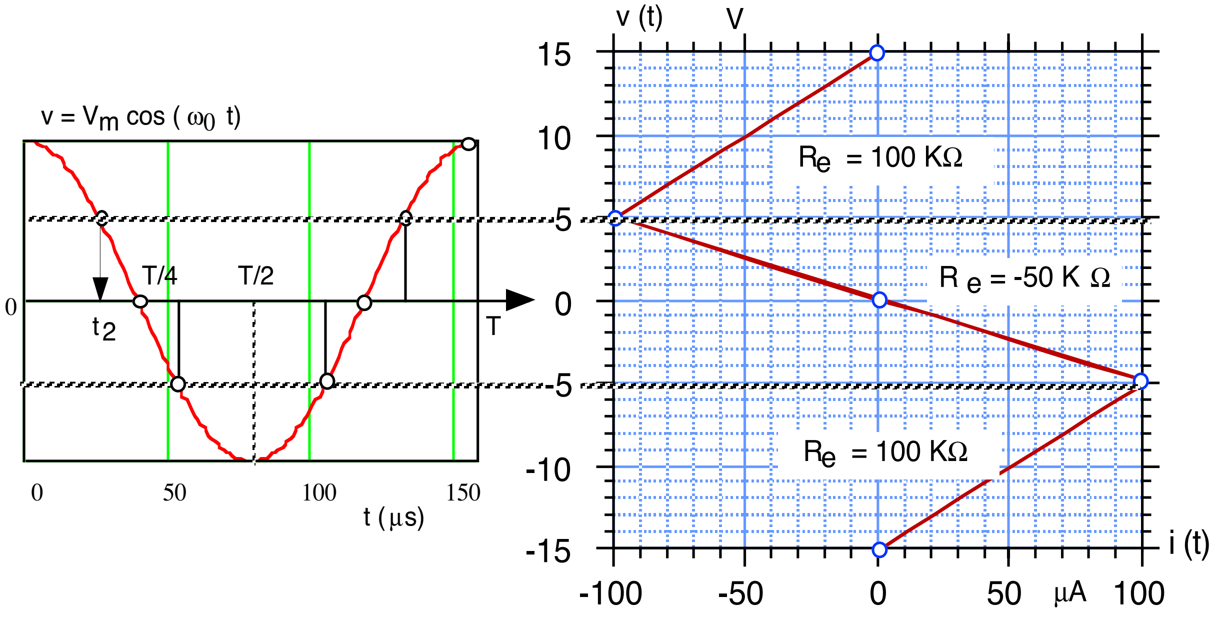


Figure 6

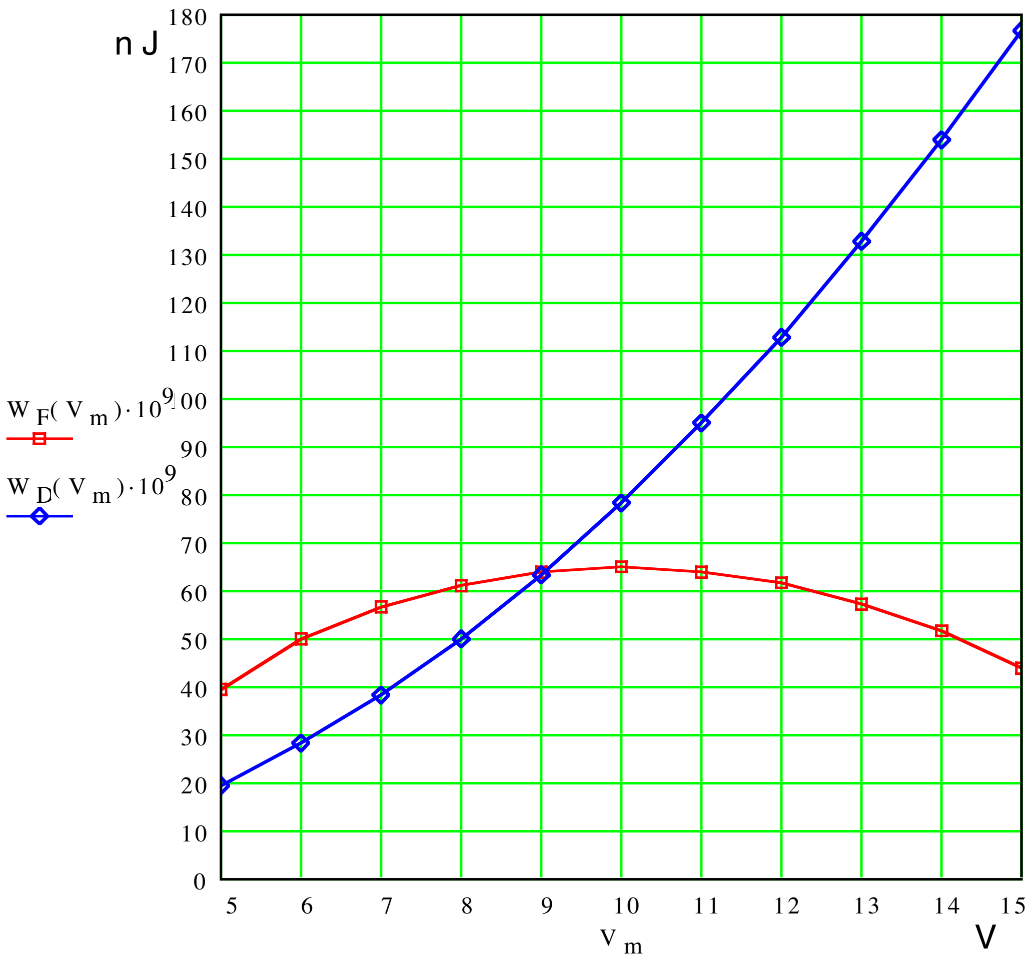
1) Déterminer, pour une amplitude V_m donnée, l'expression du temps t_2 au bout duquel la tension $v(t)= V_m \cos(\omega_0 t)$ est égale à 5 V.
Faire les applications numériques en choisissant un pas de 1 V pour V_m .

2) Calculer l' expression de l'énergie W_F donnée précédemment.
Les applications numériques et le graphe des énergies W_D et W_F sur une période en fonction de l'amplitude V_m de la tension v (t) sont donnés en annexe.

3) Déterminer graphiquement l'amplitude de stabilisation V_{m0} de v(t) en régime permanent en justifiant votre résultat.

ANNEXE : Résultats

Graphe donnant l'évolution de l'énergie W_D dissipée dans R et de l'énergie W_F fournie par le dipôle AM durant une période et ceci pour $V_m > 5V$.



V_m	W_D	W_F
5	19.625	39.25
6	28.26	49.771
7	38.465	56.706
8	50.24	61.354
9	63.585	64.042
10	78.5	64.919
11	94.985	64.062
12	113.04	61.518
13	132.665	57.318
14	153.86	51.482
15	176.625	44.024

CORRECTION

1° PARTIE : DIPOLE A RESISTANCE NEGATIVE

Q1 : $i = \dfrac{v - v_s}{R'}$ avec : $v = v_s \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$ $\boxed{\dfrac{v}{i} = -\dfrac{R_1.R'}{R_2} = -R_N}$

$R_N = 50\ k\Omega$

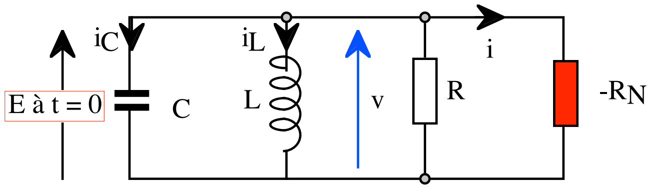
Q2 : $v_s = v(1 + \dfrac{R_2}{R_1}) = 3V$ $V_{e1} = -5\ V$ $V_{e2} = 5\ V$

Q3a : $-V_{sm} < v < V_{e1}$ -> $i = \dfrac{v + V_{sm}}{R'} = 10^{-5}(v + 15)$

Q3b : $V_{e2} < v < +V_{sm}$ -> $i = \dfrac{v - V_{sm}}{R'} = 10^{-5}(v - 15)$

2° PARTIE : CREATION D'OSCILLATIONS SINUSOIDALES

Q1 : Etablir l'équation différentielle du 2° ordre à 2° membre nul :



$i_C = C\dfrac{dv}{dt}$ $v = L\dfrac{di_L}{dt} \rightarrow i_L = \dfrac{1}{L}\int v.dt$

Equation au nœud : $C\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{1}{L}\int v.dt + \dfrac{v}{R} + \dfrac{v}{-R_N} = 0$

Soit : $\boxed{\dfrac{d^2v}{dt^2} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}q.C}\dfrac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0}$

Q2 : Résoudre numériquement l'équation caractéristique de l'équation :

$R_{eq} = -100\ k\Omega$ $\omega_0 = 40\ 10^3$ rd/s

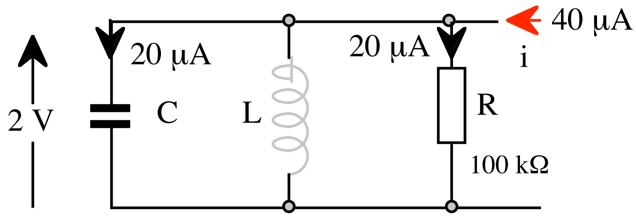
$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} - 160\frac{dv}{dt} + 1.6.10^9.v = 0}$$

$\Delta = -6.4\ 10^9$ $\sqrt{\Delta} = \pm j.80.10^3$

Solutions : $p_1 = 80 - j.40.10^3$ $p_2 = 80 + j.40.10^3$ $\alpha = 80$ $\beta = 40.10^3 = \omega^2{}_0$

$$\boxed{v(t) = e^{80.t}(A_1\cos(40.10^3 t) + A_2.\sin(40.10^3 t))}$$

Q3 : Déterminer les constantes A_1 et A_2 de l'équation compte tenu des conditions initiales.
Schéma du montage à l'instant t = 0 :



Pour t = 0, on en déduit : v(0) = $\mathbf{A_1 = 2\ V}$

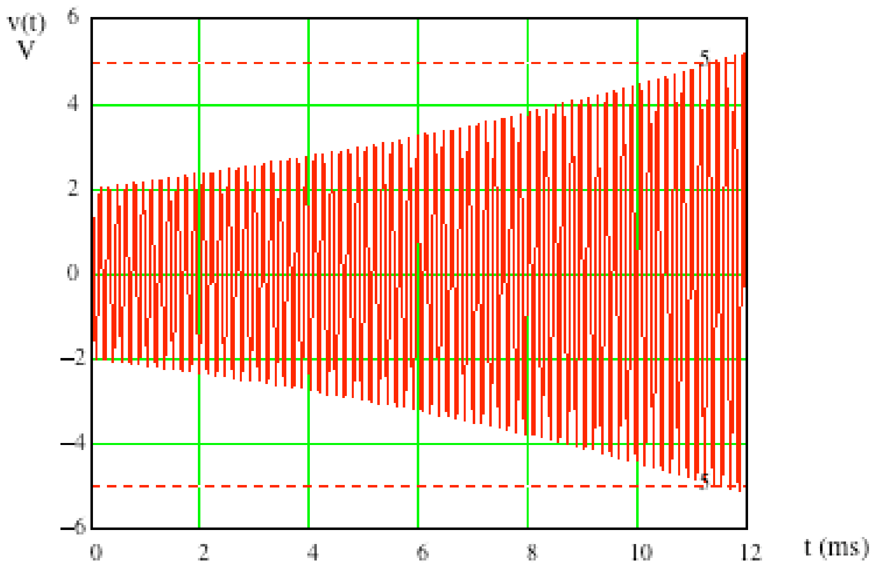
Le condensateur est chargé sous une tension initiale de 2 V. Le dipôle à résistance d'entrée négative fourni alors 40 µA (2V/50 kΩ) au montage RLC. Cependant, la self-inductance L, s'opposant au passage du courant, se comporte comme un circuit ouvert. Aussi, le condensateur C reçoit donc un courant I de 20 µA à l'instant initial.

Sachant que : $I = C\dfrac{dv}{dt}$, on calcule $(\dfrac{dv}{dt})_0 = A_1.\alpha + A_2.\beta = 320$

D'où $\mathbf{A_2 = 4.10^{-3}}$.

Bilan : le terme en A_2 sin $(40.10^3.t)$ est négligeable devant A_1 cos$(40.10^3.t)$. Dans ces conditions :

$$\boxed{v(t) \approx 2.e^{80.t}\cos(40.10^3 t)}$$



Q4 : v (t_1) = 5 V pour t_1 = 11,94 ms.

Q5 : Energie W_F fournie par le dipôle AM durant une période T :

$$W_F = \int_0^T \frac{v^2(t)}{R_n}\,dt \quad où :$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega_0\, t)$$

Soit : $\boxed{W_F = \dfrac{V_m^2}{2.R_N}T}$

Q6 : Energie W_D dissipée durant une période T de la tension v(t) dans la résistance R : $\boxed{W_D = \frac{V_m^2}{2.R}T}$

3° PARTIE : STABILISATION DE L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

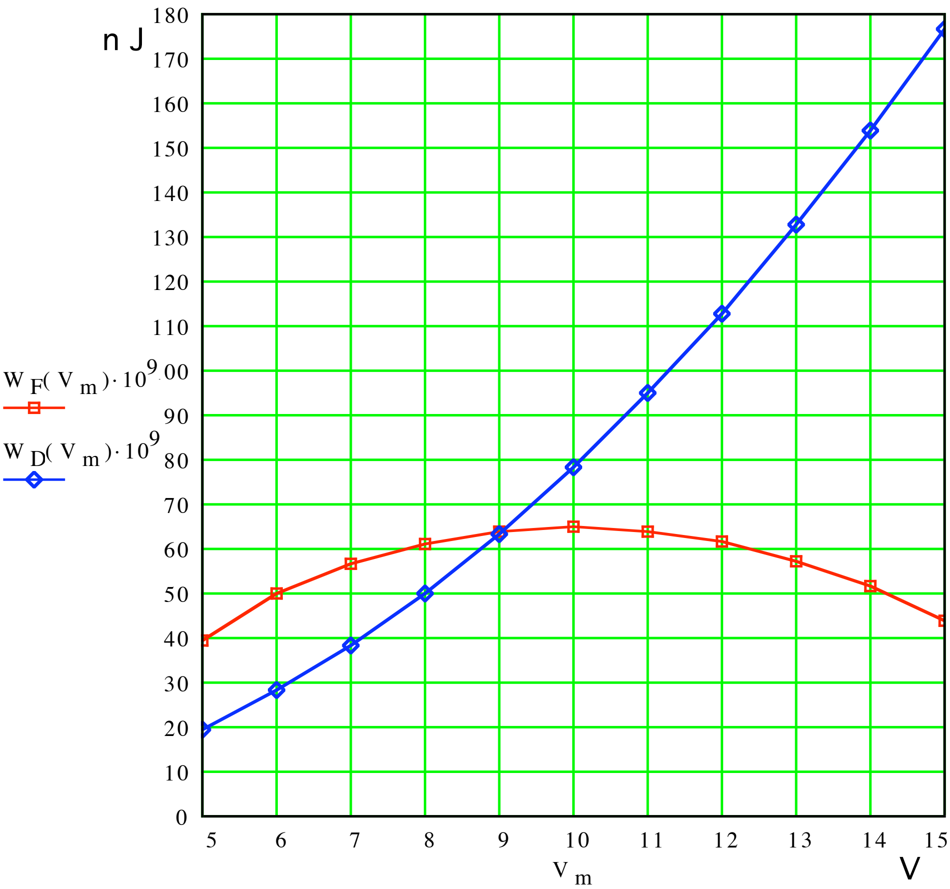
Q1 : Expression du temps t_2 au bout duquel la tension v(t)= V_m cos (ω_0 t) est égale à 5 V.

$$t_2 = \frac{1}{\omega_0} Arc\cos(\frac{5}{V_m})$$

Q2 : Expression de l'énergie W_F :

$$\boxed{W_F = -\frac{2.V_m^2}{R_3}(t_2 + \frac{\sin(2.\omega_0.t_2)}{2\omega_0}) + \frac{4V_{sm}.V_m}{R_3.\omega_0}\sin(\omega_0.t_2) + \frac{2.V_m^2}{R_3}(\frac{T}{4} - t_2 - \frac{\sin(2.\omega_0.t_2)}{2\omega_0})}$$

Q3 : La stabilisation de l'amplitude correspond à des énergies W_D et W_F égales, c'est-à-dire à l'intersection des deux graphes soit sensiblement : V_{m0} = 9V.



V_m	W_D	W_F
5	19.625	39.25
6	28.26	49.771
7	38.465	56.706
8	50.24	61.354
9	63.585	64.042
10	78.5	64.919
11	94.985	64.062
12	113.04	61.518
13	132.665	57.318
14	153.86	51.482
15	176.625	44.024