[1]SAUT EN PARACHUTE

On considère un parachutiste assimilé à un point matériel de masse m (80 Kg). A l'instant t = 0, il ouvre son parachute. Il se trouve alors à une altitude h = 1500 m au-dessus du sol et sa vitesse v_0 est de 200Km/h. Cette altitude sera l'origine du référentiel 0z (figure 1). La force f exercée par la résistance de l'air sur le parachute est proportionnelle à la vitesse instantanée : $\vec{f} = -\beta.\vec{v}$.

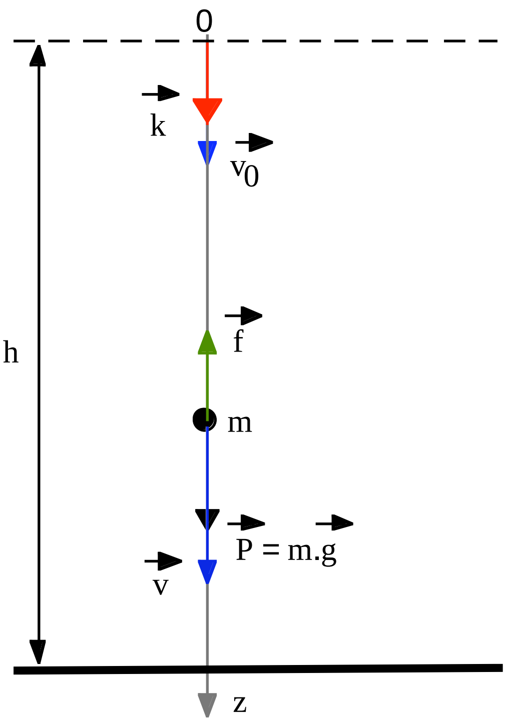


Figure 1

1. Déterminer l'expression de la vitesse v (t) du parachutiste. On fera apparaître une constante de temps τ dont on donnera l'expression.

2. Montrer que la vitesse du parachutiste tend vers une limite v_{lim} et écrire l'expression de v (t) en fonction de v_{lim} , v_0 , τ et le temps t.

3. On donne $v_{lim} = 5$ m s^{-1} et g = 9,81 m.s^{-2} :

   - Calculer le facteur β de la force de frottement ainsi que la constante de temps τ.
   - Tracer le graphe de v (t).
   - Au bout de quel temps t_1 on peut considérer que la vitesse v_{lim} est atteinte à 1:100 près ?.
   - Quelle est alors la distance h_1 parcourue ?

4. Déterminer l'expression de l'accélération a (t). Tracer son graphe. Retrouver l'expression de la vitesse limite v_{lim}.

5. Quelle est approximativement la durée de la chute du parachutiste à partir de z = 0 ?

---

[1] Ph.ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

CORRECTION

1. Bilan des forces et projection sur l'axe 0z du principe fondamental de la dynamique :

$$m.g.\vec{k} - \beta.v\vec{k} = m.\frac{dv}{dt}\vec{k}$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre avec variables séparées :

$$dt = \frac{m}{mg - \beta v}dv \qquad t = m\int \frac{dv}{mg - \beta v} + Cte \qquad t = -\frac{m}{\beta}\ln\left[\frac{mg - \beta v}{Cte}\right]$$

A l'instant initial, la vitesse est égale à v_0. On en déduit la constante : $Cte = mg - \beta v_0$.
Dans ces conditions :

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{\beta} - \left[\frac{mg}{\beta} - v_0\right]\exp(-\frac{t}{\tau})}$$

Avec une constante de temps : $\tau = \frac{m}{\beta}$.

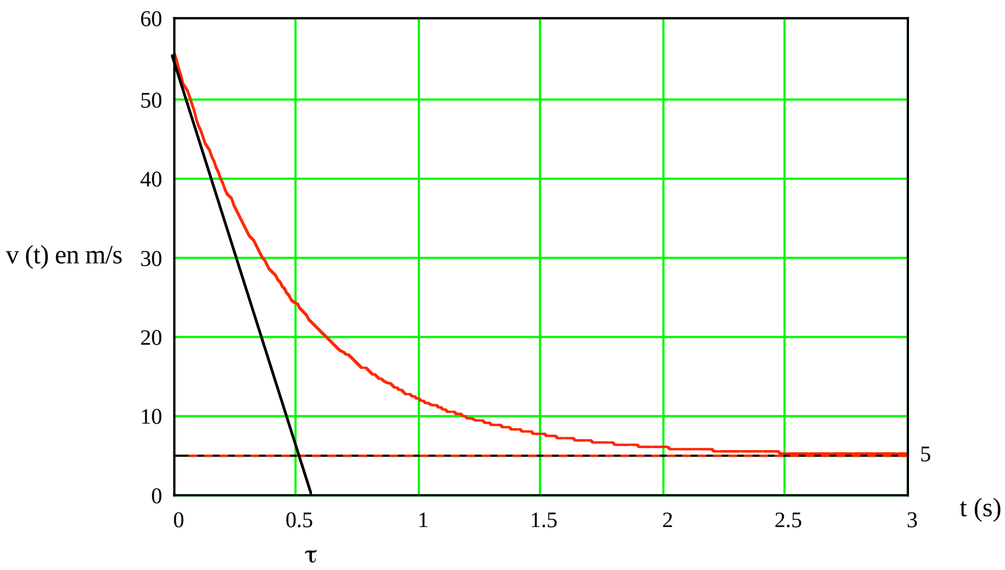
2. Lorsque le temps t >> τ, alors $v(t) \approx \frac{mg}{\beta}$ qui représente la vitesse limite. On peut alors écrire une nouvelle expression de la vitesse :

$$\boxed{v(t) = v_{\lim} - [v_{\lim} - v_0]\exp(-\frac{t}{\tau})}$$

3. Sachant que $v_{lim} = 5\ m\ s^{-1}$ (18 Km/h), on en déduit :

β	τ	t_1
157 Kg/s	0,51 s	3,53 s

Graphe de l'évolution de la vitesse :



Pour calculer de la distance h_1 parcourue au bout du temps t_1, on doit déterminer z (t).

$$v(t) = \frac{dz}{dt} \qquad z = \int v(t)dt + Cte \qquad \text{avec : } v(t) = v_{\lim} - \left[v_{\lim} - v_0\right]\exp(-\frac{t}{\tau})$$

$$z = v_{\lim}.t + (v_{\lim} - v_0)\tau\exp(-\frac{t}{\tau}) + Cte$$

L'instant initial où z (0) = 0 donne la constante : $Cte = -(v_{\lim} - v_0)$.

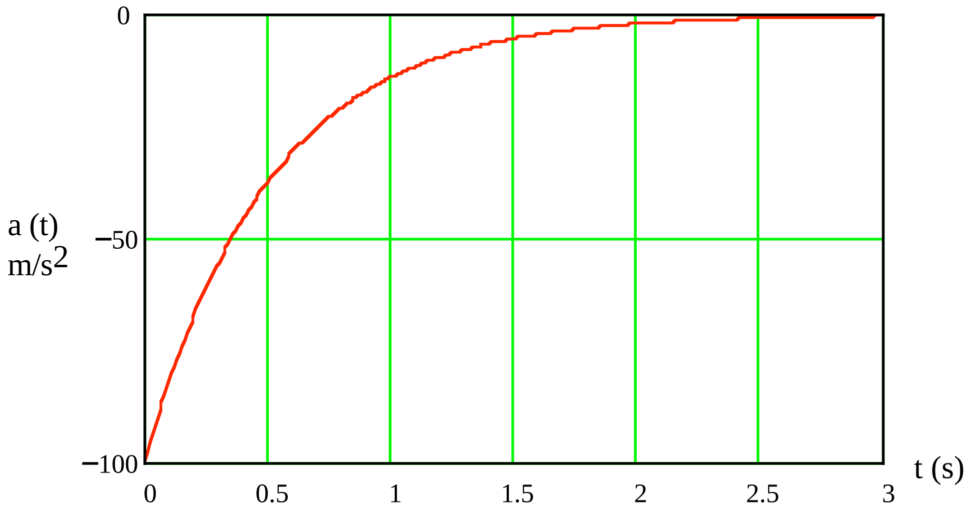
$$\boxed{z = v_{\lim}.t + (v_{\lim} - v_0)\tau\left[\exp(-\frac{t}{\tau}) - 1\right]}$$

A l'instant t_1 = 3,53 s, on obtient : $\boxed{h_1 \approx v_{\lim}.t + (v_0 - v_{\lim})\tau = 43{,}4m}$

4. Expression de l'accélération $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

$$\boxed{a(t) = -\frac{v_0 - v_{\lim}}{\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})}$$

Graphe de l'accélération :



A l'instant initial le parachutiste subit une accélération de –99,2 m.s^{-2} soit –10g.

Au bout du temps t >> 7.τ l'accélération est nulle. Dans ces conditions la somme des forces est aussi nulle : $m.g = \beta.v_{\lim}$. On retrouve bien l'expression de la vitesse limite.

5. Durée t de la chute du parachutiste à partir de z = 0.

Le terme $\exp(-\frac{t}{\tau})$ tend rapidement vers zéro. Aussi on peut exploiter la relation de la question 3 : $h \approx v_{\lim}.t + (v_0 - v_{\lim})\tau$

$$\boxed{t = \frac{h - (v_0 - v_{\lim})\tau}{v_{\lim}} = 294s}$$