[1]PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

Un étudiant de deuxième année effectue son stage au Centre d'Essais des Landes dans le département Essais et Mesures chargé notamment d'enregistrer à l'aide de capteurs situés dans un projectile, un certain nombre d'informations transmises par radio (par exemple : la vitesse et l'accélération à chaque instant, la trajectoire, la précision du tir...).
Avant le tir, l'étudiant fait une prévision des résultats sachant que :

- *Le projectile est assimilable à un point matériel M de masse m*
- *Sa vitesse initiale v_0 sur la rampe de lancement est de 500 m s^{-1} avec un angle de tir de 45° (angle α entre OX et la vitesse initiale).*
- *Le référentiel choisi OX (horizontale du lieu), OZ (verticale) de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{k}$ est considéré comme absolu.*

Il applique le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{g} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ *qu'il projette ensuite sur les axes OX et OZ et obtient les résultats suivants :*

- $0 = m\dfrac{dv_x}{dt} \;->\; v_x = v_0\cos\alpha \;->\; x = v_0 t\cos\alpha$
- $-mg = m\dfrac{dv_z}{dt} \;->\; v_z = -gt + v_0\sin\alpha \;->\; z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha$
- *Trajectoire :* $z = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$

La trajectoire enregistrée lors du tir (graphe 2 de la figure 1) montre que l'analyse réalisée par l'étudiant (graphe 1 de la figure 1) est inexacte.

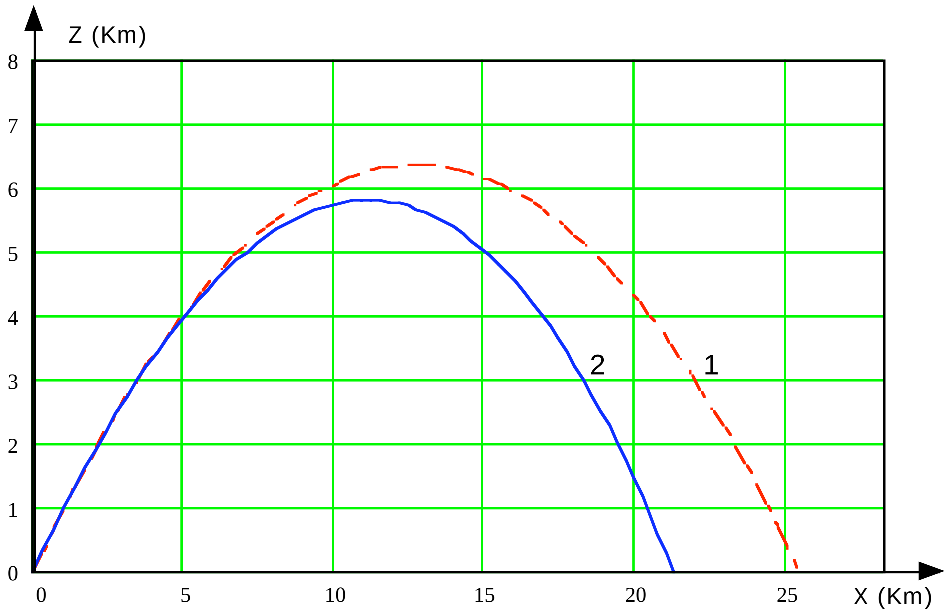

Figure 1 : Trajectoires prévue (1) et enregistrée (2)

[1] Ph.ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

En effet, comme indiqué en figure 2, il est nécessaire de tenir compte de la force $\vec{f}$ due à la résistance de l'air qui, opposée à la vitesse, est telle que : $\vec{f} = -k.m.\vec{v}$ (k constante positive).

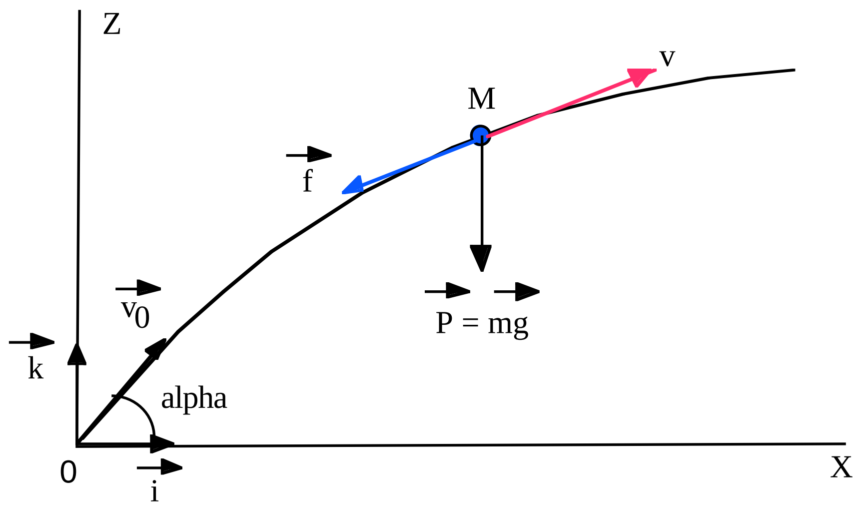

Figure 2

Dans ces conditions :

1. Déterminer sur l'axe 0X l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse v_x (t) du mobile. Résoudre cette équation différentielle.

2. En déduire l'expression du mouvement x (t) projeté sur l'axe 0X.

3. Déterminer sur l'axe 0Z l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse v_z (t) du mobile. Résoudre cette équation différentielle.

L'analyse de graphe 2 de la figure 1, montre que l'altitude maximale Z_{max} (où la vitesse v_z du mobile est nulle) est égale à 5,8 Km et ceci au temps t_1 = 33,7 s. Cette information permet de déterminer le facteur k qui est très inférieur à 1. On développe alors le terme exp (+k.t_1) selon :

$$\exp(k.t_1) = 1 + k.t_1 + \frac{(k.t_1)^2}{2}.$$

4. En déduire l'expression de k en fonction de v_0, α, g et t_1. Faire l'application numérique.

CORRECTION

1. Projetons les vecteurs forces $\vec{P}$ et $\vec{f}$ sur l'axe OX et appliquons la 2° loi de Newton :

$$-k.m.v_x.\vec{i} = m\frac{dv_x}{dt}\vec{i}\ .$$

Soit l'équation différentielle du premier ordre : $-k.dt = \dfrac{dv_x}{v_x}$

$$\int -k.dt = \int \frac{dv_x}{v_x} + Cte \qquad -k.t = \ln(v_x) + Cte$$

Sachant qu'à l'instant initial : $v_x(0) = v_0\cos\alpha$, on en déduit la constante : $Cte = -\ln(v_0\cos\alpha)$

$$\boxed{v_x = v_0\cos(\alpha)\exp(-k.t)}$$

2. Mouvement projeté sur l'axe OX.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos(\alpha)\exp(-k.t)$$

$$x = \int v_0\cos(\alpha)\exp(-k.t).dt + Cte \qquad x = -\frac{v_0\cos(\alpha)}{k}\exp(-k.t) + Cte$$

Sachant qu'à l'instant initial : $x(0) = 0$, on en déduit : $Cte = \dfrac{v_0\cos(\alpha)}{k}$

$$\boxed{x = \frac{v_0\cos(\alpha)}{k}\left[1 - \exp(-k.t)\right]}$$

3. Projetons les vecteurs forces $\vec{P}$ et $\vec{f}$ sur l'axe OZ et appliquons la 2° loi de Newton :

$$-k.m.v_z.\vec{k} - mg\vec{k} = m\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

Soit l'équation différentielle du premier ordre : $-dt = \dfrac{dv_z}{kv_z + g}$

$$-\int dt = \int \frac{dv_z}{kv_z + g} + Cte \qquad -t = \frac{1}{k}\ln(kv_z + g) + Cte$$

Sachant qu'à l'instant initial : $v_z(0) = v_0\sin\alpha$, on en déduit : $Cte = -\dfrac{1}{k}\ln(kv_0\sin\alpha + g)$

$$\boxed{v_z = (v_0\sin\alpha + \frac{g}{k})\exp(-kt) - \frac{g}{k}}$$

4. A l'instant t_1, on atteint l'altitude maximale z_{max} où $v_z = 0$ m.s^{-1}. On obtient alors la relation :

$$\exp(-kt_1) = \frac{\frac{g}{k}}{v_0\sin\alpha + \frac{g}{k}} \quad \text{->} \quad \exp(kt_1) = 1 + \frac{kv_0\sin\alpha}{g}$$

Soit en développant : $1 + k.t_1 + \dfrac{(k.t_1)^2}{2} = 1 + \dfrac{kv_0\sin\alpha}{g}$

$$\boxed{k = \frac{2}{t_1^2}\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g} - t_1\right)}$$

A.N. k = 4,1 10^{-3} N.Kg^{-1}.m^{-1}.s.