

CIRCUITS RLC

Self-inductance réelle en régime sinusoïdal permanent.

Condensateur réel en régime sinusoïdal permanent.

Généralisation du passage réversible de la forme impédance à la forme admittance.

Circuit RLC série excité en tension à fréquence variable.

Circuit RLC série : filtres du 2^o ordre.

Circuit RLC parallèle excité en courant à fréquence variable.

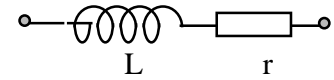
Circuits RLC en régime transitoire.

Application : entretien des oscillations dans un circuit RLC série compensé par une résistance négative.

I. SELF-INDUCTANCE REELLE EN REGIME SINUSOIDAL PERMANENT

1) Coefficient de qualité d'une self-inductance.

Considérons une self-inductance L dont l'ensemble des imperfections est représenté par une résistance série r . Son impédance est telle que : $Z = r + j\omega L$ (1). Soit :



$$Z = j\omega L \left(1 + j\frac{r}{\omega L} \right) \quad (2)$$

Pour comparer les self-inductances, on leur attribue un coefficient de qualité :

$$Q_L(\omega) = \frac{\omega L}{r} \quad (3)$$

Ainsi, à une fréquence donnée, une self-inductance ayant une résistance série de valeur très faible possède un coefficient de qualité important. Elle se rapproche alors d'une self-inductance parfaite telle que : $Z = j\omega L$.

2) Passage de la forme impédance Z a la forme admittance Y .

Cette transformation peut être utile lors de la mise en équation d'un schéma. Lorsque les self-inductances fonctionnent à une fréquence où leur Q_L est suffisamment important, il est possible de donner à ce composant une image admittance Y .

$$Y = \frac{I}{Z} = \frac{I}{r + j\omega L}$$

Multiplications par la quantité conjuguée : $Y = \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2}$

Mettons en évidence le coefficient de qualité Q_L :

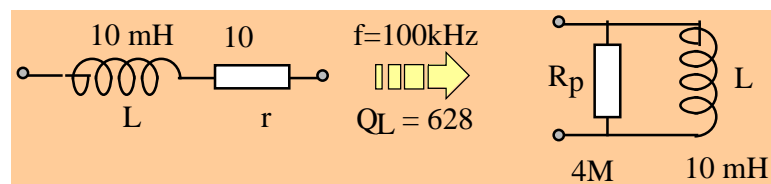
$$Y = \frac{r}{(\omega L)^2 \left(\frac{1}{Q_L^2(\omega)} + 1 \right)} - j \frac{\omega L}{(\omega L)^2 \left(\frac{1}{Q_L^2(\omega)} + 1 \right)}$$

Si la fréquence d'utilisation est telle que : $\frac{1}{Q_L^2(\omega)}$ inférieur à 1, on peut écrire :

$$Y \approx \frac{r}{(\omega L)^2} + \frac{1}{j\omega L} \quad \text{soit compte-tenu de (3) :} \quad Y = Q_L^2(\omega)r + \frac{1}{j\omega L}$$

L'admittance image est composée de la self-inductance parfaite L et d'une résistance parallèle : $R_p = Q_L^2(\omega).r$.

Exemple : à la fréquence de 100 kHz, une self-inductance L de 10 mH, de résistance série r de 10 Ω , ayant alors un coefficient de qualité Q_L de 628, est simulée par une self $L = 10\text{mH}$ de résistance parallèle R_p de 4M Ω .



II. CONDENSATEUR REEL EN REGIME SINUSOIDAL PERMANENT

1) Coefficient de qualité d'un condensateur.

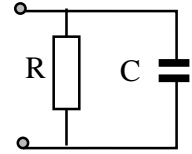
Considérons un condensateur C dont l'ensemble des imperfections est représenté par une résistance parallèle R. Son admittance est telle que :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C \quad (4) \text{ soit : } \underline{Y} = j\omega C \left(1 - \frac{j}{\omega RC}\right) \quad (5)$$

Pour comparer les condensateurs, on leur attribue un coefficient de qualité :

$$Q_C(\omega) = \omega RC \quad (6)$$

Ainsi, à une fréquence donnée, un condensateur ayant une résistance parallèle de forte valeur possède un coefficient de qualité important. Il se rapproche d'une capacité parfaite.



2) Passage de la forme admittance Y à la forme impédance Z.

Lorsque les condensateurs fonctionnent à une fréquence où leur $Q_C(\)$ est suffisamment important, il est possible de donner à ce composant une image impédance Z.

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}$$

Multiplions par la quantité conjuguée :
$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2} - j \frac{\omega C}{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$$

Mettons en évidence le coefficient de qualité Q_C :

$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{R(\omega C)^2}}{\left(\frac{1}{R^2} + 1\right)} - j \frac{\frac{\omega C}{(\omega C)^2}}{\left(\frac{1}{R^2} + 1\right)}$$

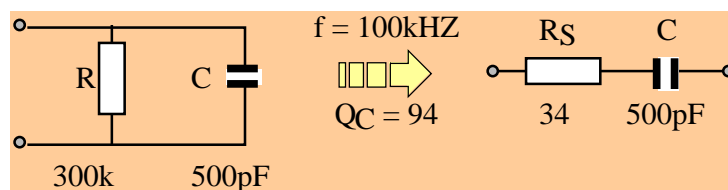
Si la fréquence d'utilisation est telle que : $\frac{1}{Q_C^2(\omega)} \ll 1$, on peut écrire :

$$\underline{Z} \approx \frac{1}{R(\omega C)^2} + \frac{1}{j\omega C} \quad \text{soit, compte-tenu de (6) : } \underline{Z} = \frac{R}{Q_C^2(\omega)} + \frac{1}{j\omega C}$$

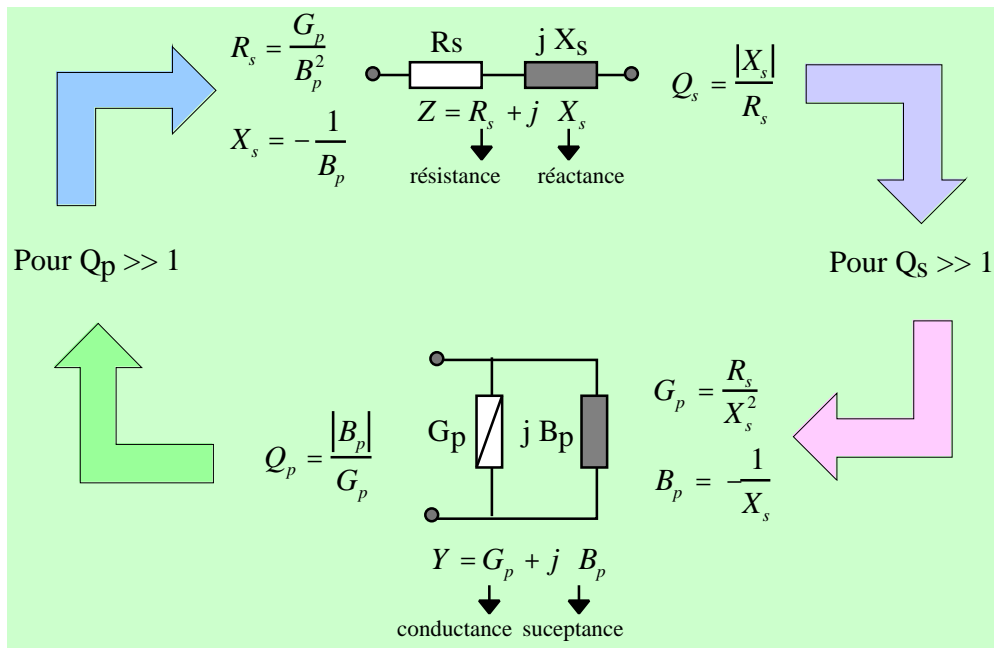
L'impédance image est composée d'un condensateur parfait C et d'une résistance série

$$R_s = \frac{R}{Q_C^2(\omega)}$$

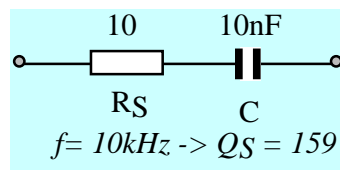
Exemple : à la fréquence de 100 kHz, un condensateur C de 500pF, de résistance parallèle R égale à 300 k , ayant alors un coefficient de qualité Q_C de 94, est simulé par un condensateur C de 500pF de résistance série $R_s = 34 \ \Omega$.



III. GENERALISATION DU PASSAGE DE LA FORME $Z \leftrightarrow Y$



Exemple : Considérons un condensateur C parfait ayant en série une résistance R_s .

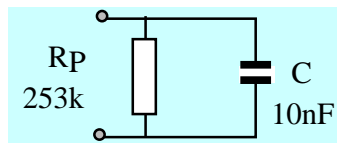


L'impédance a pour expression : $Z = R_s + j \frac{-1}{\omega C}$.

A la fréquence f , on attribue à l'ensemble un coefficient de qualité : $Q_s = \frac{1}{\omega R_s C}$.

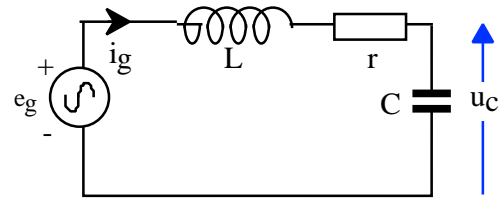
Si Q_s est suffisamment important, on transforme le circuit série en un circuit parallèle composé de la même capacité C ($jB_p = j C$) munie d'une résistance en parallèle :

$$R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{1}{R_s \omega^2 C^2}$$



IV. CIRCUIT RLC SERIE EXCITE EN TENSION A FREQUENCE VARIABLE

On considère le circuit RLC série suivant excité par une tension sinusoïdale : $e_g = E_{gm} \sin(2\pi ft)$.



1) Impédance du montage :

$$Z = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (7)$$

a. Fréquence de résonance.

On appelle fréquence de résonance f_0 du circuit la fréquence pour laquelle la partie imaginaire de (7) est nulle.

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad (8) \quad \text{soit :} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

b. Coefficient de qualité du circuit Q_s du circuit RLC série.

A la fréquence de résonance, la self-inductance L de résistance série r, possède un coefficient de qualité (relation (3)) qui est par définition celui du circuit RLC série :

$$Q_s = \frac{L\omega_0}{r} \quad (9) \quad \text{soit compte-tenu de (8) :} \quad Q_s = \frac{1}{\omega_0 r C} \quad (10)$$

2) Impédance du circuit en fonction de Q_s et de la fréquence réduite.

La pulsation de résonance et le coefficient de qualité Q_s du circuit RLC constituent les paramètres physiques essentiels du montage. Aussi, pour généraliser, on va exprimer l'impédance Z du circuit en fonction de Q_s et de la fréquence réduite :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \quad (11)$$

La relation (7) s'écrit : $Z = r(1 + j(\frac{\omega_0 L}{r} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 r C} \frac{\omega_0}{\omega}))$

Il vient alors avec (9) (10) et (11) : $Z = r(1 + jQ_s(x - \frac{1}{x}))$ (12)

La figure 1 représente les graphes de l'évolution du module et de l'argument de Z en fonction de la fréquence réduite x pour $r = 10$ et $Q_s = 10$.

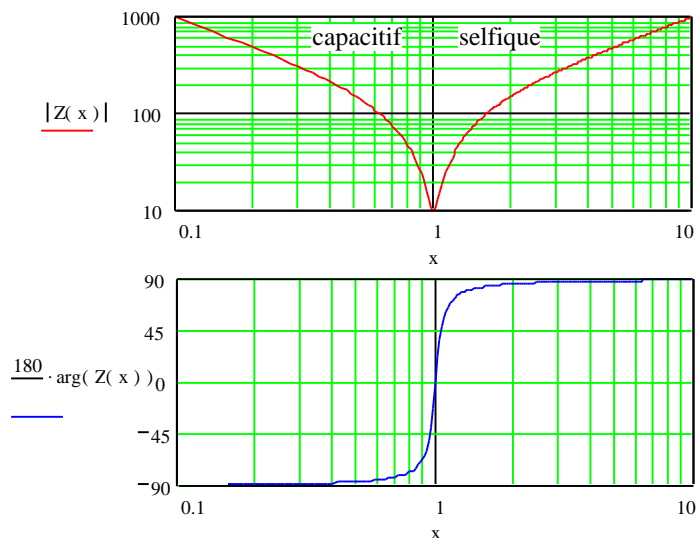


Figure 1 : module et argument de Z en fonction de la fréquence réduite x

3) Expression approchée de l'impédance Z autour de la fréquence de résonance f_0 .

La partie la plus intéressante la variation fréquentielle de l'impédance Z du circuit se situe autour de $x = 1$. A cet effet, on change de variable au profit de la dissonance qui évolue autour de 0 :

$$\delta = \frac{f - f_0}{f_0} = x - 1$$

La relation (12) s'écrit alors : $Z = r(1 + jQ_s \frac{x^2 - 1}{x})$ $Z = r(1 + jQ_s \frac{(x-1)(x+1)}{x})$

Sachant que : $x = 1 + \delta$: $Z = r(1 + jQ_s \frac{\delta(\delta + 2)}{\delta + 1})$

Pour δ voisin de zéro, on obtient la forme approchée de l'impédance autour de la résonance :

$$Z = r(1 + j 2 Q_s \delta) \quad (12)$$

4) Etude de la tension aux bornes du condensateur : surtension.

Exprimons la tension u_c : $u_c = e_g \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{Z}$ soit : $u_c = e_g \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{r(1 + jQ_s(x - \frac{1}{x}))}$

Exprimons en fonction du coefficient de qualité du montage :

$$u_c = e_g \frac{1}{j\omega_0 Cr} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{(1 + jQ_s(x - \frac{1}{x}))} \text{ soit avec (10) :}$$

$$u_c = e_g \frac{Q_s}{jx} \frac{1}{(1 + jQ_s(x - \frac{1}{x}))} = e_g \frac{Q_s}{jx + Q_s(1 - x^2)} \quad (13)$$

La figure 2 représente le module et l'argument de la tension u_c pour un coefficient de qualité $Q_s = 10$ et $E_{gm} = 1V$. On remarque la présence d'une surtension au voisinage de $x = 1$ où la tension u_c est égale à $Q_s \cdot E_{gm}$ soit 10V.

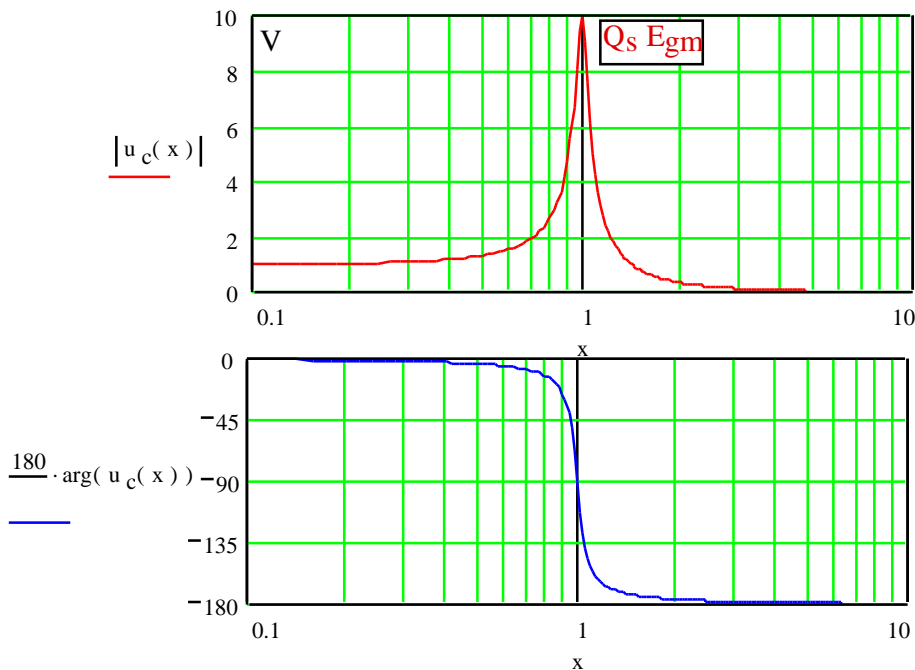


Figure 2

4) **Expression de la fréquence réduite x_1 qui correspond au maximum de u_c .**

Exprimons le module de u_c : $|u_c| = \frac{E_{gm} Q_s}{\sqrt{x^2 + Q_s^2(1 - x^2)^2}}$

Le maximum du module de u_c se produit lorsque le dénominateur est minimum.

Calculons sa dérivée par rapport à x : $\frac{d}{dx}(x^2 + Q_s^2(1 - x^2)^2) = 2x(1 - 2Q_s^2(x^2 - 1))$

Cette dérivée est nulle pour la fréquence réduite : $x_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_s^2}}$

Lorsque le coefficient de qualité est supérieur à 5, on peut avec une très bonne approximation, assimiler x_1 à $x = 1$ c'est-à-dire à la fréquence de résonance f_0 .

5) **Bande passante de la tension aux bornes du condensateur.**

La bande passante est située de part et d'autre de $x=1$. Aussi il est plus pratique de prendre l'expression du module de la tension u_c en fonction de la variable dissonance :

$$|u_c| = \frac{Q_s E_{gm}}{\sqrt{1 + 4Q_s^2 \delta^2}}$$

Les dissonances de coupures (figure 3) correspondent à : $\frac{Q_s E_{gm}}{\sqrt{2}}$, soit : $4Q_s^2 \delta = 1$.

Solutions : $\delta_1 = \frac{1}{2Q_s}$ et $\delta_2 = -\frac{1}{2Q_s}$.

Sachant que : $\delta = \frac{f - f_0}{f_0}$, on en déduit la bande passante de la tension u_c :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_s} \quad (14)$$

La figure 3 représente le module de la tension u_c en fonction de δ autour de la résonance avec $Q_s = 10$ et $E_{gm} = 1V$.

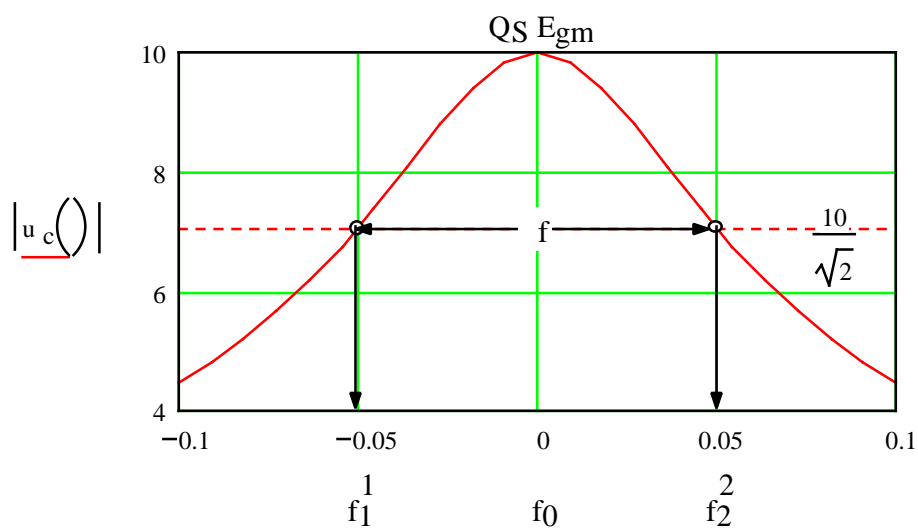
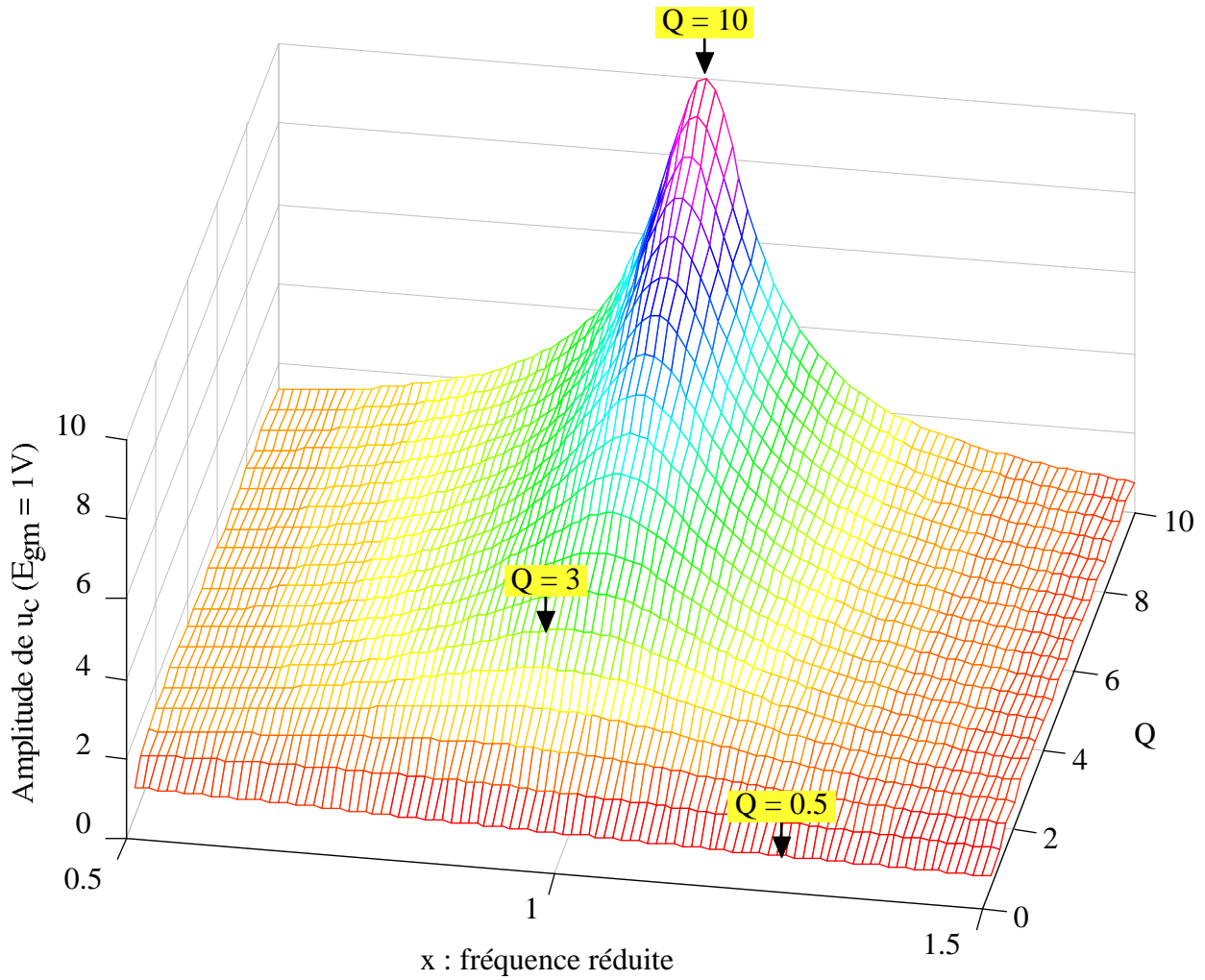


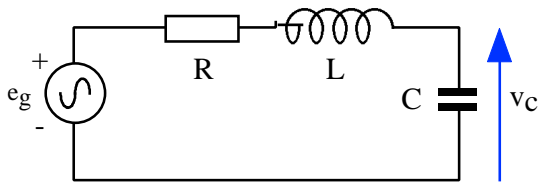
Figure 3

COURBE DE REPONSE EN 3D DU CIRCUIT RLC SERIE

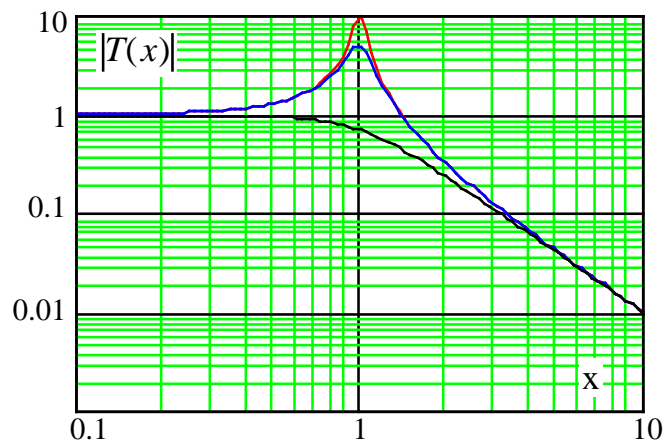


CIRCUIT RLC SERIE EN REGIME SINUSOIDAL : FILTRES 2° ORDRE

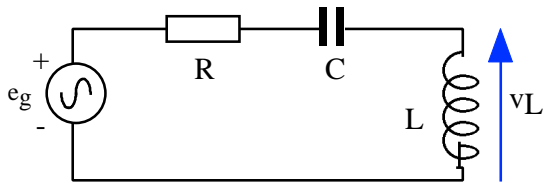
Filtre passe-bas



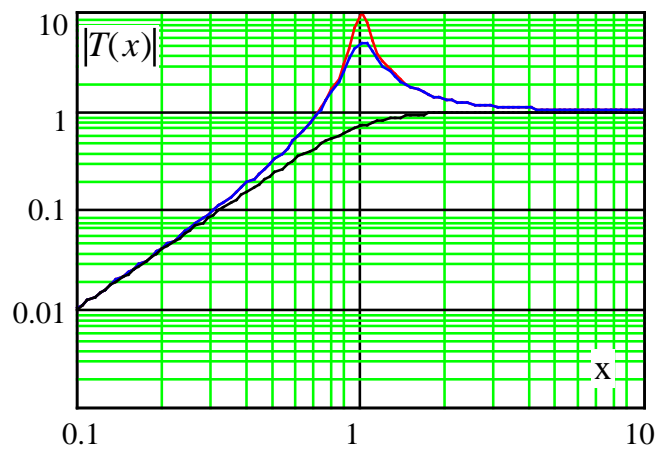
$$T(x) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$



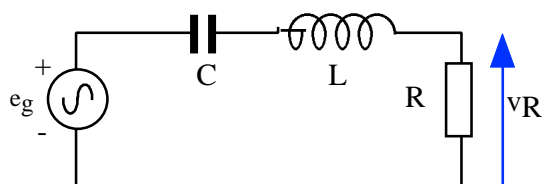
Filtre passe-haut



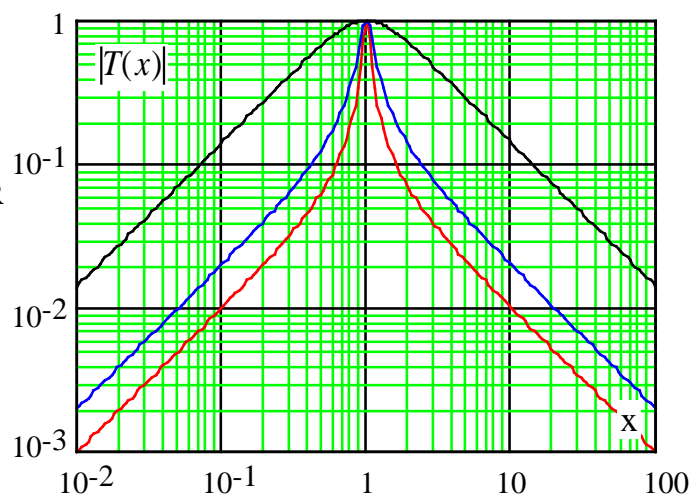
$$T(x) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$



Filtre passe-bande



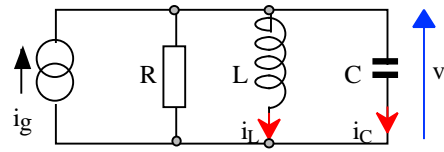
$$T(x) = \frac{-j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$



Les courbes de réponses sont données pour 3 valeurs du coefficient de qualité Q : 10, 5 et $2/2$.
 $x = f / f_0$ est la fréquence réduite et f_0 la fréquence de résonance

V. CIRCUIT RLC PARALLELE EXCITE EN COURANT A FREQUENCE VARIABLE

On considère le circuit RLC parallèle suivant excité par un courant sinusoïdal : $i_g = I_{gm} \sin(2\pi ft)$. La résistance R représente l'image parallèle de la résistance série r de la self-inductance ($R = Q_L^2 \cdot r$).



1) Impédance du montage :

$$Y = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \quad (15)$$

a. Fréquence de résonance.

On appelle fréquence de résonance f_0 du circuit la fréquence pour laquelle la partie imaginaire de (7) est nulle.

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad (16) \quad \text{soit :} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

b. Coefficient de qualité du circuit Q_s du circuit RLC série.

A la fréquence de résonance, le module de la tension v prend la valeur RI_{gm} . Exprimons dans ces conditions l'expression du courant dans la self-inductance et la capacité :

$$(i_L)_{\omega_0} = \frac{v}{j\omega_0 L} \quad |i_L|_{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} I_{gm} \quad (i_C)_{\omega_0} = j\omega_0 C v \quad |i_C|_{\omega_0} = \omega_0 R C I_{gm}$$

A la résonance, ces deux courants doivent s'annuler. Ils doivent avoir la même amplitude, avec une phase opposée. On remarquera que leur amplitude est plus élevée que celle du générateur. On définit donc le coefficient de qualité Q_p du circuit RLC parallèle :

$$Q_p = \frac{R}{\omega_0 L} = RC\omega_0 \quad (17)$$

2) Admittance du circuit en fonction de Q_p et de la fréquence réduite.

La pulsation de résonance et le coefficient de qualité Q_p du circuit RLC parallèle constituent les paramètres physiques essentiels du montage. Aussi, on va exprimer l'admittance du circuit en

fonction de Q_p et de la fréquence réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \quad (18)$

La relation (15) s'écrit aussi : $Y = G(1 + j(\frac{\omega_0 C}{G} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 R L} \frac{\omega_0}{\omega}))$

Il vient alors avec (17) et (18) : $Y = G(1 + jQ_p(x - \frac{1}{x})) \quad (19)$

La figure 4 représente les graphes de l'évolution du module et de l'argument de Y en fonction de la fréquence réduite x pour $G = 10^{-5}S$ et $Q_p = 10$.

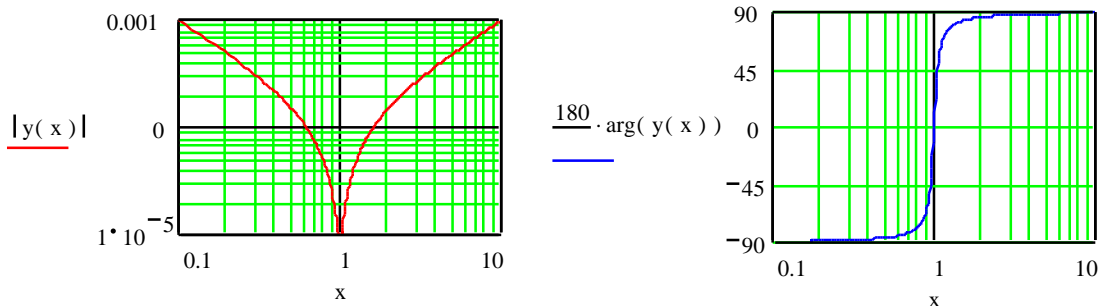


Figure 4

3) Expression approchée de l'admittance autour de $x = 1$ soit : $f = f_0$.

La partie la plus intéressante du comportement de l'admittance du circuit se situe autour de x égal à 1. A cet effet, on utilise la variable dissonance : $\delta = \frac{f - f_0}{f_0} = x - 1$

La relation (19) s'écrit : $\underline{Y} = G(1 + jQ_p(\frac{x^2 - 1}{x}))$ $\underline{Y} = G(1 + jQ_p \frac{(x - 1)(x + 1)}{x})$

Sachant que : $x = 1 + \delta$: $\underline{Y} = G(1 + jQ_p \frac{\delta^2 + 2\delta}{\delta + 1})$

Pour δ voisin de zéro, on obtient la forme approchée de l'impédance :

$$\underline{Y} = G(1 + j 2 Q_p \delta) \quad (20)$$

4) Tension aux bornes du montage : bande passante.

La tension v aux bornes du montage s'exprime : $v = \frac{i_g}{Y}$ soit : $v = \frac{i_g}{G(1 + jQ_p(x - \frac{1}{x}))}$

La figure 5 représente l'évolution du module et de l'argument de la tension v en fonction de la fréquence réduite x ($I_{gm} = 1$ mA, $G = 10^{-5}$ S et $Q_p = 10$).

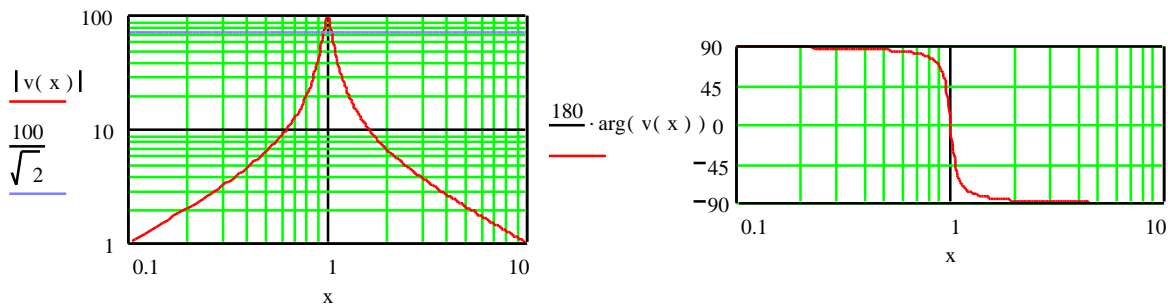


Figure 5

Exprimons le module de v : $|v| = \frac{RI_{gm}}{\sqrt{1 + Q_p^2(x - \frac{1}{x})^2}}$

Pour $x = 1$ le module de la tension v est maximal : $v_{max} = RI_{gm} = 100$ V.

La partie la plus intéressante du comportement du circuit se situe autour du maximum où x est égal à 1 ou bien $\delta = 0$. En utilisant la dissonance δ , le module de v s'exprime selon :

$$|v| = \frac{RI_{gm}}{\sqrt{1 + 4Q_p^2\delta^2}}$$

Les dissonances de coupures à correspondent à : $4Q_p^2\delta = 1$ soit : $\frac{RI_{gm}}{\sqrt{2}}$.

Solutions : $\delta_1 = \frac{1}{2Q_p}$ et $\delta_2 = -\frac{1}{2Q_p}$. On en déduit, comme pour le circuit RLC série, la bande passante du circuit :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_p} \quad (21).$$

CIRCUITS RLC EN REGIME TRANSITOIRE

CIRCUITS RLC EN REGIME TRANSITOIRE

1^{ière} PARTIE : CIRCUIT RLC SERIE EN REGIME LIBRE

On considère le montage RLC série suivant où la capacité est initialement chargée sous la tension E sachant que l'interrupteur K est placé sur la position 1. A l'instant $t = 0$, on bascule K en position 2. On se propose de chercher l'expression de la tension $v(t)$ avec une résistance R est variable.

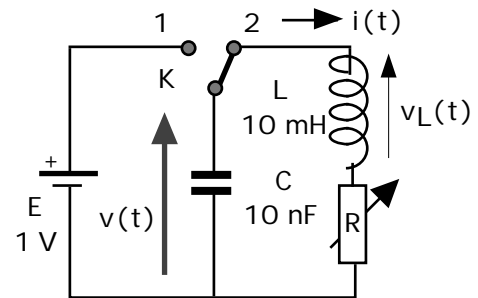
Sachant que : $v_L = L \frac{di}{dt}$, $i = -C \frac{dv}{dt}$, en introduisant les caractéristiques fondamentales du circuit RLC

série, à savoir résonance ω_0 et coefficient de qualité Q ou m l'amortissement, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 m \omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0 \quad \dots(1)$$

m : coefficient d'amortissement

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2m} = \frac{L \omega_0}{R}$$



La tension $v(t)$ est la solution d'une équation différentielle du 2^o ordre avec 2^o membre nul. Dans cette solution vont apparaître deux constantes C_1 et C_2 qui seront calculées à partir des conditions initiales. En effet à l'instant $t = 0$:

- Le condensateur C "garde ses charges" soit : $v(0^-) = v(0^+) = E$
- L'inductance L "garde son courant" soit : $i(0^-) = i(0^+) = 0 \text{ mA}$

1. OSCILLATIONS PROPRES DU CIRCUIT OSCILLANT

On envisage d'abord le cas purement théorique où $R = 0$, soit un amortissement $m = 0$ (ou $Q = \infty$)

L'équation différentielle (1) devient alors :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \omega_0^2 v = 0 \quad \text{solution : } v(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

La tension aux bornes du condensateur est purement cosinusoidale. Il se produit un échange périodique de l'énergie initiale stockée dans le condensateur, entre ce dernier et la self. Lorsqu'on ferme l'interrupteur K, on offre ainsi, à la capacité, un circuit lui permettant de se décharger. A l'instant $t = T/4$, la capacité est déchargée, mais le courant i est extremum et l'inductance ne tolérant aucune variation brutale de courant, prolonge ce courant en provoquant la charge de la capacité en sens inverse et ainsi de suite.

2. OSCILLATIONS PROPRES AMORTIES DU CIRCUIT OSCILLANT

Dans le cas général où R n'est pas nulle, l'équation (1) admet des solutions de la forme :

$$v = E e^{p.t} \quad \frac{dv}{dt} = E p e^{p.t} \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = E p^2 e^{p.t}$$

Ce qui conduit à l'équation caractéristique du 2^o degré : $p^2 + 2 m \omega_0 p + \omega_0^2 = 0$ (2) dont les solutions dépendent du déterminant $\Delta' = \omega_0^2 \sqrt{m^2 - 1}$ lié à la résistance R du montage que l'on peut écrire :

$$R = 2 m L \omega_0 = 2 m \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le circuit oscillant fonctionne dans trois régimes suivant la valeur de la résistance R.

a) Régime Critique : $m = 1$ ($Q = 0.5$) pour une résistance $R_{critique} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

L'équation caractéristique (2) a une racine double $p = -\omega_0$ et la solution de (1) est de la forme :

$$v(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\omega_0 t)$$

La recherche des constantes C_1 et C_2 à $t = 0$ donne : $C_1 = E$ et $C_2 = E \omega_0$

Pour $L = 10$ mH, $C = 10$ nF et $R = R_{critique} = 2$ K, le graphe de $v(t)$ pour $m = 1$ est donné en fig. 1

b) Régime hypercritique : $m > 1$ ($Q < 0.5$) soit $R > R_{critique}$

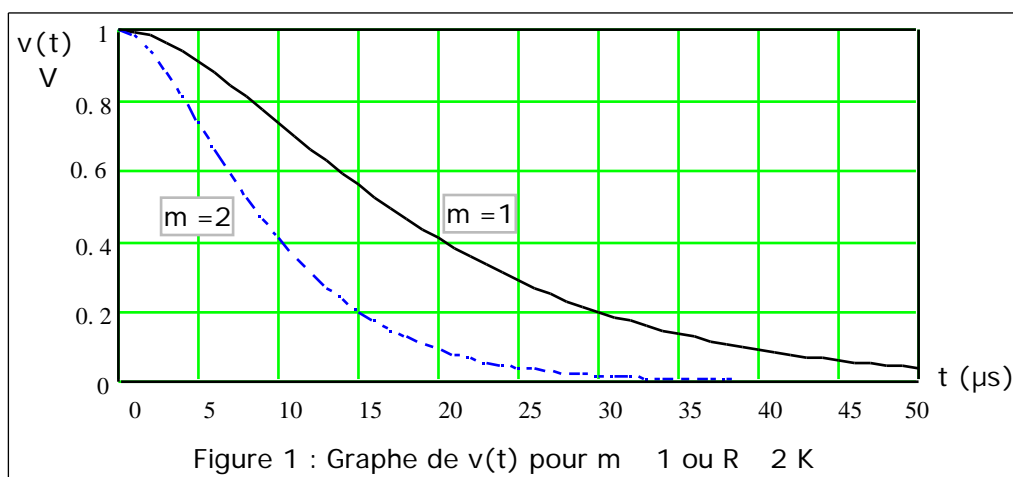
Les racines de l'équation caractéristique (2) sont alors réelles : $p_{1,2} = -\omega_0 (-m \pm \sqrt{m^2 - 1})$ et la solution (voir cours de math) de l'équation (1) s'écrit :

$$v(t) = C_1 \exp(p_1 t) + C_2 \exp(p_2 t)$$

La recherche des constantes C_1 et C_2 liées aux conditions initiales conduit à :

$$C_1 = \frac{E p_2}{p_2 - p_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{E p_1}{p_1 - p_2}$$

Pour $m = 2$, la figure 1 donne l'évolution de la tension $v(t)$ qui garde la même esthétique lorsque $m = 1$.



c) Régime des oscillations amorties : $0 < m < 1$ ($Q > 0.5$) soit $R < R_{critique}$

Le déterminant de l'équation caractéristique (2) a deux racines imaginaires :

$$p_{1,2} = -m \omega_0 \pm j \omega_1 \quad \text{avec} : \omega_1^2 = \omega_0^2 (1 - m^2)$$

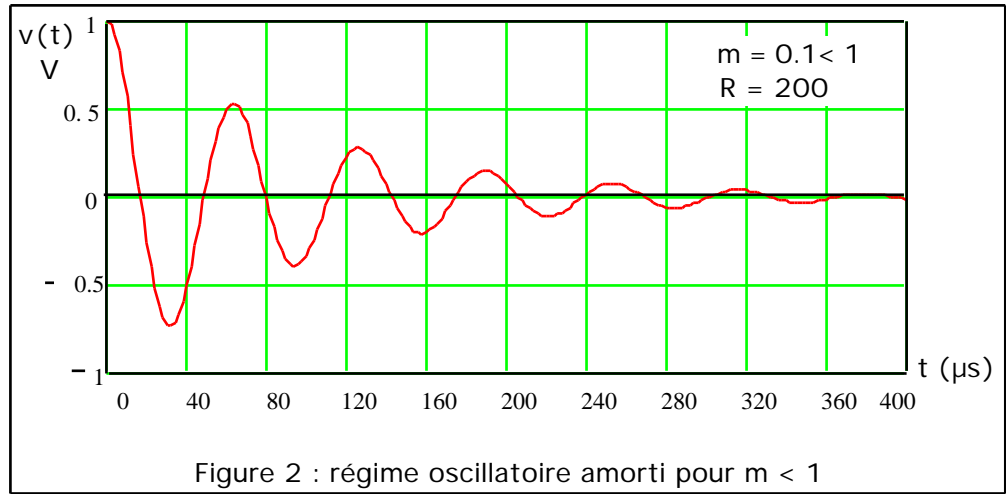
La pulsation ω_1 est la pseudo-période et compte-tenu des conditions initiales, on obtient encore :

$$C_1 = \frac{E p_2}{p_2 - p_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{E p_1}{p_1 - p_2}$$

Sachant que : $\sin(\omega t) = \frac{\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)}{2j}$ et $\cos(\omega t) = \frac{\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)}{2}$, il est alors possible de mettre la tension $v(t)$ sous la forme :

$$v(t) = E \cdot \left[\exp(-m \omega_0 t) \right] \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{m \omega_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right]$$

Le graphe de la tension $v(t)$ montre en figure 2 un régime oscillatoire amorti.



Remarque: en posant $\tan \theta = m \omega_0 / \omega_1$ l'équation précédente prend aussi la forme :

$$v(t) = \frac{E}{\cos \theta} \exp(-m\omega_0 t) \cos(\omega_1 t - \theta)$$

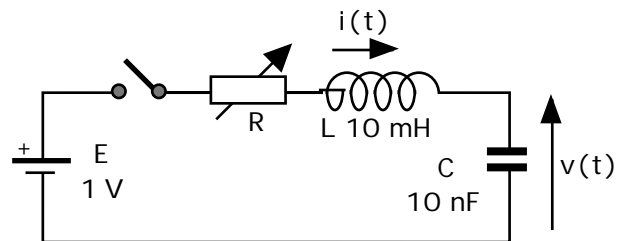
2 ème PARTIE : CIRCUIT RLC SERIE ALIMENTE PAR UNE TENSION CONSTANTE

Considérons le schéma suivant. A l'instant $t = 0$ (où $i(0) = 0$ mA et $v(0) = 0$ V), on ferme l'interrupteur. On se propose de chercher l'évolution en fonction du temps de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur. Mise en équations :

$$E = R i(t) + L \frac{di}{dt} + v(t) \quad \text{avec : } i = C \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2 m \omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \frac{E}{LC} \quad (3)$$

en posant : $LC \omega_0^2 = 1$ et $Q = \frac{1}{2m} = \frac{L\omega_0}{R}$



Contrairement à l'équation (1), l'équation (3) est une équation différentielle du 2° ordre avec 2° membre non nul dont la solution (voir cours de math) est égale à la somme : de l'équation différentielle avec 2° membre nul et d'une solution particulière de l'équation avec 2° membre.

1) SOLUTION PARTICULIERE

Le 2° membre étant constant, cherchons une solution de ce type à savoir $v(t) = \text{Constante}$. Il vient alors :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \quad \text{et l'équation (3) indique : } v(t) = \frac{E}{LC \omega_0^2} = E$$

Cette solution particulière est physiquement évidente. En effet, si le temps t tend vers l'infini, la capacité finira bien par se charger sous la tension E du générateur.

2) SOLUTION COMPLETE

A la solution particulière précédente, il faut ajouter la solution générale de l'équation avec 2° membre nul. En ce qui concerne la solution générale, on se retrouve dans la situation de la 1° partie avec les trois possibilités régies par le coefficient d'amortissement $m = 1 / 2Q$.

Les constantes C_1 et C_2 sont à nouveau déterminées à $t = 0$ (conditions initiales) à partir de la solution complète.

a) Coefficient d'amortissement $m > 1$, solution complète de l'équation (3) :

$$v(t) = E + C_1 \exp(-p_1 t) + C_2 \exp(-p_2 t)$$

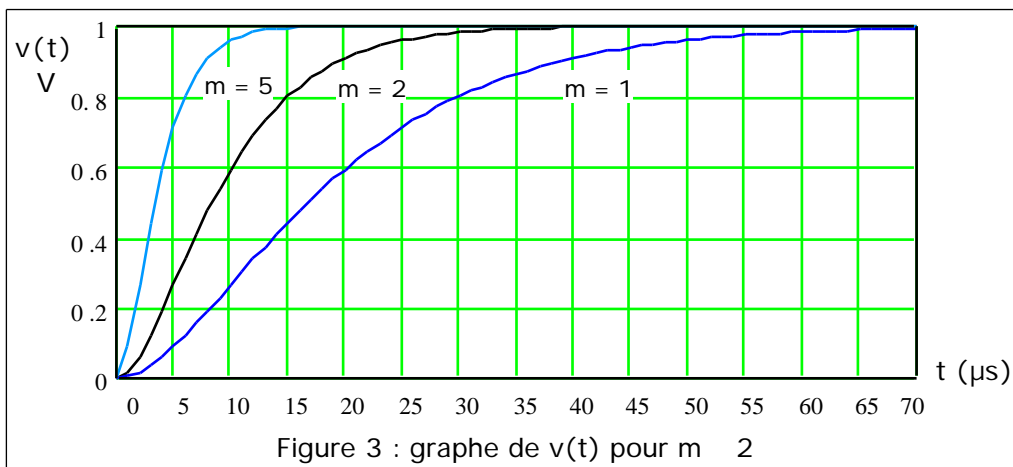
$$\text{où } p_{1,2} = \omega_0 (-m \pm \sqrt{m^2 - 1})$$

Les conditions initiales : $v(0^+) = v(0^-) = E + C_1 + C_2 = 0$ et $i(0^+) = i(0^-) = p_1 C_1 + p_2 C_2 = 0$ conduisent à : $C_1 = \frac{-p_2 E}{p_2 - p_1}$ et $C_2 = \frac{-p_1 E}{p_1 - p_2}$. Le graphe de la tension $v(t)$ est donné en figure 3

b) Coefficient d'amortissement $m = 1$, solution complète de l'équation (3) :

$$v(t) = E - E(1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)$$

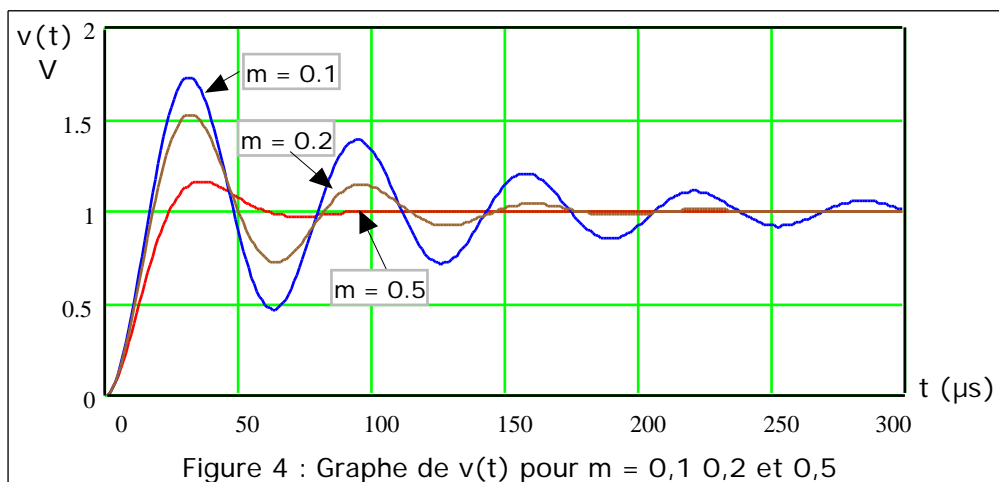
Le graphe de la tension $v(t)$ est donné en figure 3. Pour $m = 1$, l'esthétique des courbes est similaire.



c) Coefficient d'amortissement $0 < m < 1$, solution complète de l'équation (3) et graphe :

$$v(t) = E - \frac{E}{\sqrt{1 - m^2}} \exp(-m\omega_0 t) \cos(\omega_1 t + \Phi)$$

$$\text{avec : } \tan(\Phi) = -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$$

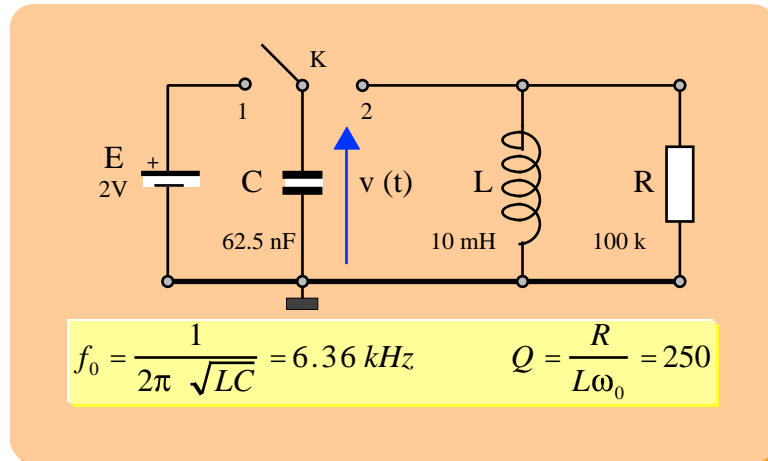


APPLICATION

ENTRETIEN DES OSCILLATIONS DANS UN CIRCUIT RLC SERIE

COMPENSE PAR UNE RESISTANCE NEGATIVE

CIRCUIT RLC PARALLELE : OSCILLATIONS AMORTIES



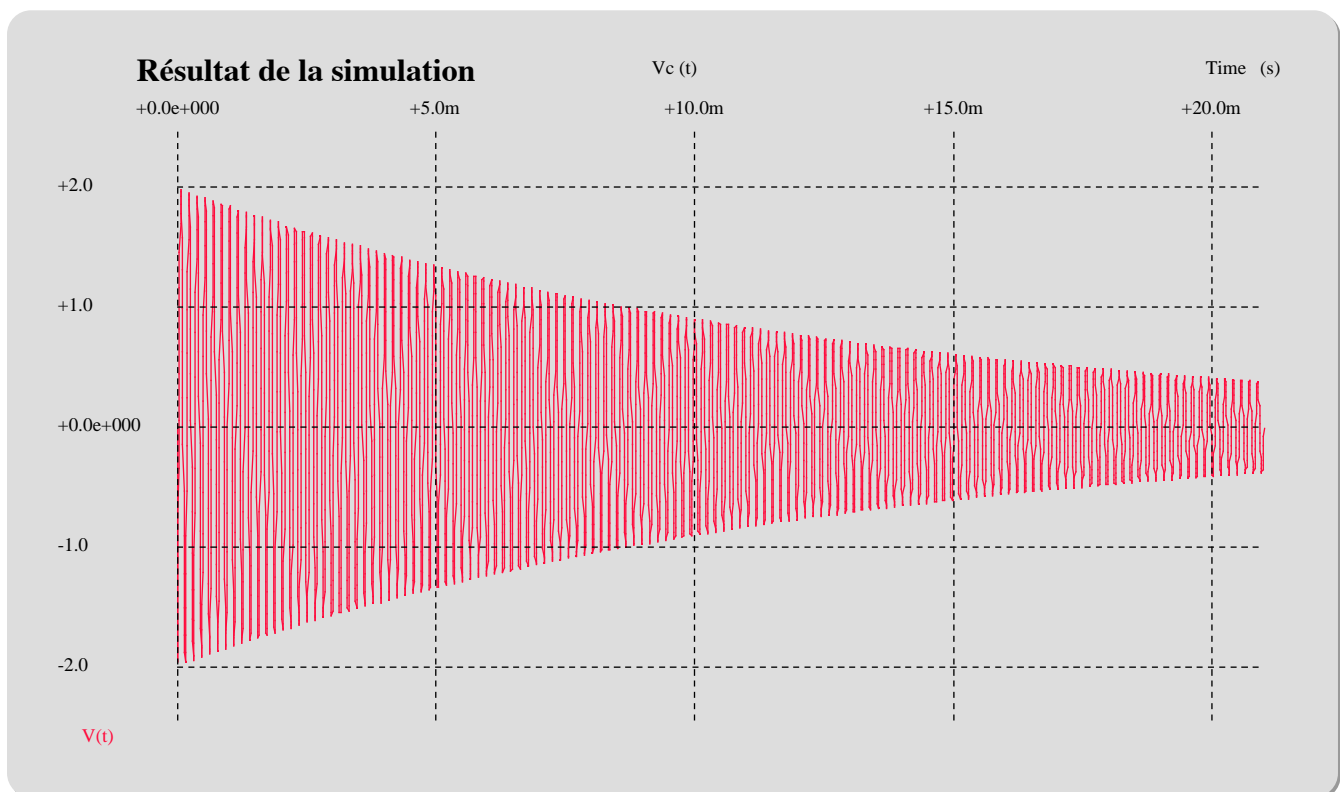
Interrupteur K en position 1 : la capacité se charge sous 2 V.

Interrupteur K en position 2 : La tension $v(t)$ aux bornes du circuit RLC parallèle satisfait à l'équation différentielle du 2^o ordre :

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2 = 0$$

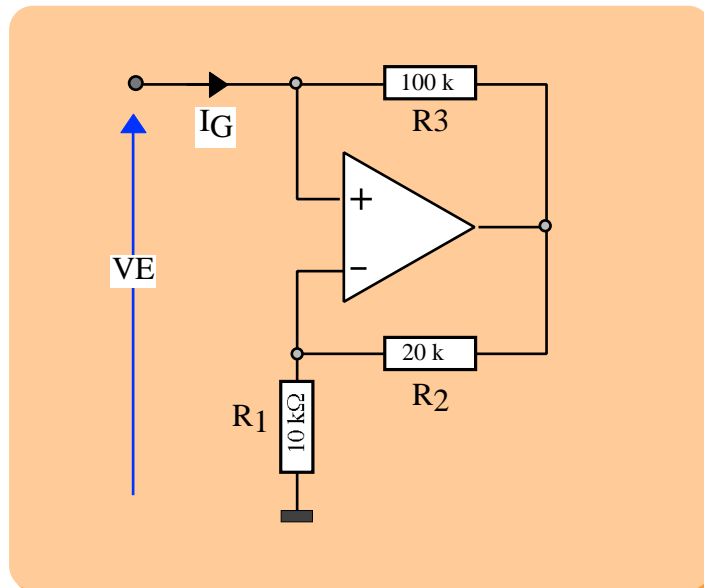
solution : $v(t) = 2 \exp(-80 t) \cos(\omega_0 t)$

Les oscillations du circuit sont amorties et disparaissent.



Pour entretenir l'amplitude des oscillations, on va compenser la résistance R qui amorti le circuit R L.

CONCEPTION D'UNE RESISTANCE NEGATIVE



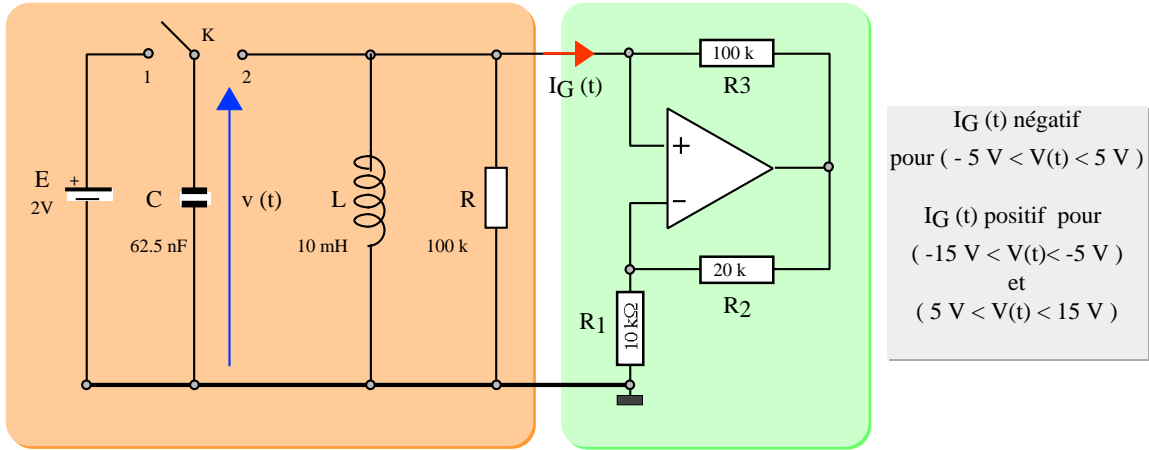
Lorsque l'amplificateur dont le gain en tension est égal à 3, fonctionne dans sa zone linéaire ($-5 \text{ V} < V_E < 5 \text{ V}$) sa résistance d'entrée est négative : $R_E = -50 \text{ k}$ (I_G est négatif).

En dehors de cette zone ($-15 \text{ V} < V_E < -5 \text{ V}$ et $5 \text{ V} < V_E < 15 \text{ V}$), l'amplificateur sature. Sa tension de sortie est respectivement égale à -15 V et $+15 \text{ V}$ et sa résistance d'entrée est positive : $R_E = +100 \text{ k}$ (I_G est positif).

Courant d'entrée I_G en fonction de V_E



REALISATION D'UN OSCILLATEUR SINUSOIDAL



Lorsque l'énergie dissipée dans R est compensée par l'énergie fournie par le circuit à résistance négative, l'amplitude de la tension $v(t)$ se stabilise à 8 V.

