

RAYON CRITIQUE D'UN MANCHON ISOLANT

Dans le local technique d'une entreprise fabriquant des produits en caoutchouc est installée une conduite d'eau chaude maintenue à température constante : $T_1 = 66\text{ }^\circ\text{C}$. Cette eau circule en permanence dans un tube en cuivre (figure 1) ayant un rayon externe r_1 de 6 mm. On néglige la conductivité thermique du cuivre, de telle sorte que la surface extérieure du tube est à la température T_1 . La température T_a du local technique est maintenue à $21\text{ }^\circ\text{C}$.

1. Calculer, par unité de longueur ($L = 1\text{ m}$), la puissance échangée par phénomène de convection avec l'air ambiant.

On donne le coefficient d'échange convectif : $h = 8.64\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$.

Pour limiter la déperdition de chaleur et faire des économies, un technicien décide d'isoler le tube avec un manchon en caoutchouc de rayon extérieur r_2 de valeur convenable. La conductivité thermique du caoutchouc est : $\lambda = 155\text{ }10^{-3}\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$.

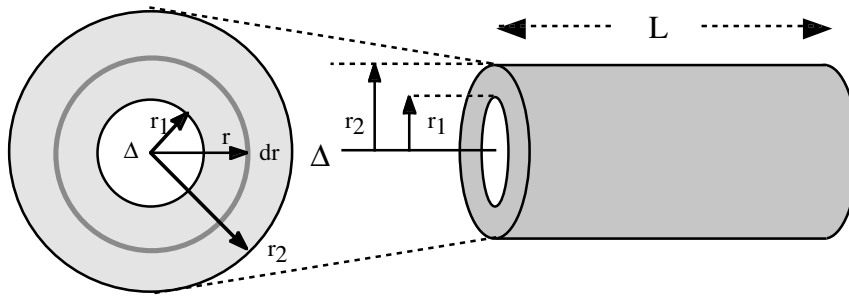


Figure 1

2. Déterminer la résistance thermique de conduction R_{th} (cond) du manchon isolant de longueur L et de rayon extérieur $r_2 \geq r_1$.
3. En tenant compte du phénomène de convection ($h = 8.64\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$) qui se produit maintenant entre la surface extérieure du manchon et le local, dessiner le schéma thermique du dispositif. Donner l'expression de la résistance thermique de convection R_{th} (conv). Ecrire l'expression de la résistance thermique totale R_{th} (tot) qui s'établit entre la conduite d'eau et le local et ceci pour $L = 1\text{ m}$.
4. Tracer le graphe donnant l'évolution des résistances thermiques R_{th} (cond), R_{th} (conv) et R_{th} (tot) en fonction de l'épaisseur du manchon $e = r_2 - r_1$ avec $r_2 > r_1$.
5. Déterminer en fonction des coefficients h et λ , la valeur particulière du rayon r_2 appelé **rayon critique** pour lequel la résistance thermique totale R_{th} (tot) passe par un minimum. Faire l'application numérique.
6. Par unité de longueur L , quelle est la puissance échangée par la conduite d'eau avec le milieu extérieur pour r_2 égal à r_2 critique ? Calculer aussi cette puissance pour $r_2 = 5$ et 10 cm . Le choix du caoutchouc est-il judicieux ?

7. Le technicien est contraint de choisir un autre matériau pour obtenir une isolation plus efficace. Compte tenu de la valeur du rayon de la tuyauterie en cuivre, quelle doit être la conductivité thermique maximale λ_m du manchon permettant de se libérer du phénomène néfaste du rayon critique ?
8. Pour $\lambda = \lambda_m$ et $r_2 = 5$ cm, quelle est la puissance échangée par la conduite d'eau avec le milieu extérieur pour $L = 1$ m ?

CORRECTION

1. Puissance échangée par phénomène de convection avec l'air ambiant :

$$\Phi = hS(T_1 - T_a) = h(2\pi r_1 L)(T_1 - T_a) = 14,66W .$$

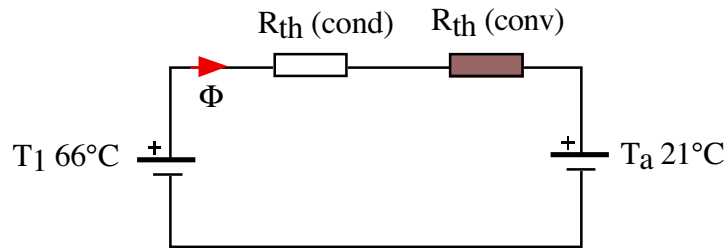
2. Résistance thermique de conduction $R_{th} (cond)$ du manchon isolant de longueur L et de rayon extérieur $r_2 \geq r_1$.

On considère en figure 1, un élément de cylindre placé en r d'épaisseur élémentaire dr . Cet élément possède une résistance thermique de conduction élémentaire :

$$dR_{th}cond = \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{S} \quad \text{avec : } S = 2\pi r L$$

$$dR_{th}cond = \frac{1}{2\pi L \lambda} \frac{dr}{r} \quad \rightarrow \quad R_{th}cond = \frac{1}{2\pi L \lambda} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

3. Schéma thermique du dispositif :

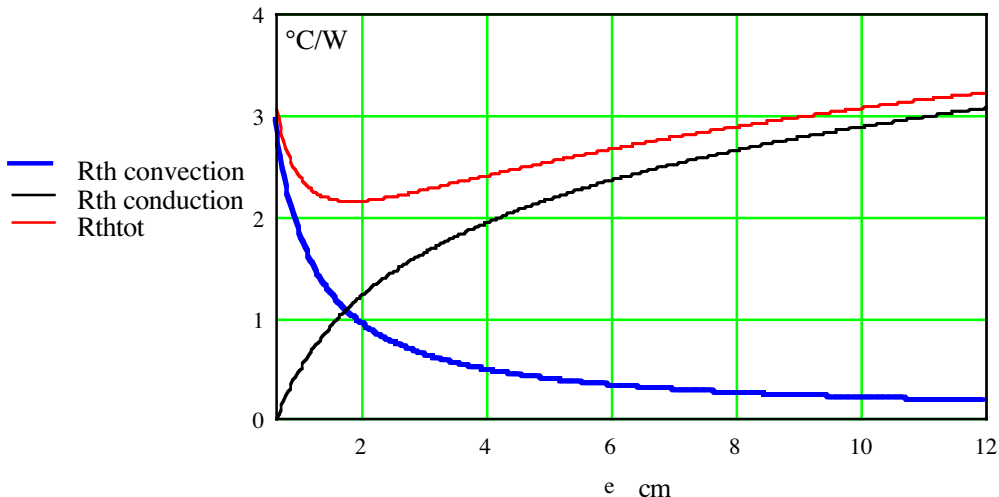


Les deux résistances thermiques sont en série et pour $L = 1 m$:

- Conduction : $R_{th}cond = \frac{1}{2\pi \lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$
- Convection : $R_{th}conv = \frac{1}{h2\pi r_2}$

$$R_{th}tot(1m) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h r_2} \right]$$

4. Evolution des résistances thermiques en fonction de l'épaisseur e du manchon.



La résistance thermique totale passe par un minimum qui correspond à « r_2 critique ».

5. Recherche du rayon critique en dérivant l'expression de R_{th} tot par rapport à r_2 :

$$\frac{R_{th\ tot}(1m)}{dr_2} = \frac{hr_2 - \lambda}{2\pi\lambda hr^2}$$

Cette dérivée est nulle pour :

$$r_{2\ critique} = \frac{\lambda}{h}$$

Application numérique : $r_{2\ critique} = 1,79$ cm.

6. Pour une longueur de 1 m, calculons la puissance Φ échangée par la conduite d'eau avec le milieu extérieur :

r_2 (cm)	critique 1,79 cm	5 cm	10 cm
$R_{th\ cond}$ ($^{\circ}C/W$)	1,125	2,177	2,889
$R_{th\ conv}$ ($^{\circ}C/W$)	1,027	0,368	0,184
$R_{th\ tot}$ ($^{\circ}C/W$)	2,151	2,545	3,073
Φ (W)	20,9	17,68	14,64

Le tableau indique que, bien que l'épaisseur du manchon de caoutchouc augmente, la puissance échangée est toujours importante. Le choix de ce matériau est donc mauvais.

7. Pour se libérer du phénomène du rayon critique, on le choisit égal à la dimension de la tuyauterie soit : $r_2\ critique = r_1 = 6$ mm.
On en déduit alors : $\lambda_m = h r_1 = 0,052\ W\ m^{-1}\ K^{-1}$.
8. Pour $\lambda = \lambda_m$ et $r_2 = 5$ cm, la puissance échangée par la conduite d'eau avec le milieu extérieur pour $L = 1$ m est de 6,54 W.