[1]MISE EN EQUILIBRE THERMIQUE D'UNE RESISTANCE

Une résistance électrique R de 10 KΩ, capable de dissiper une puissance électrique maximale de 1/4 W, est placée dans l'air de température T_a = 25 °C.
Ces dimensions et sa masse m sont données en figure 1. La chaleur massique du matériau résistif est telle que : $C_P = 0{,}37 J\ g^{-1}\ °C^{-1}$.

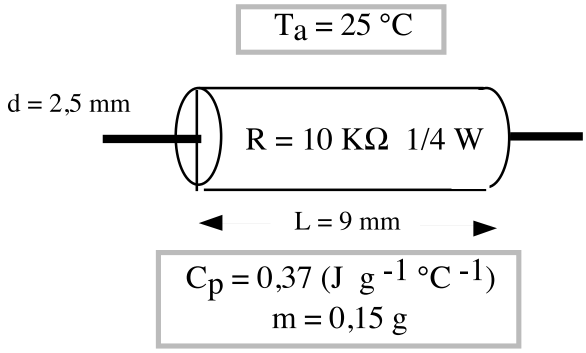


Figure 1

1. A l'instant t = 0, on fait passer un courant I de 5 mA dans la résistance R. Calculer la puissance électrique P à laquelle est soumise la résistance.

Lorsque la résistance n'est pas soumise au courant électrique I, elle est en équilibre thermique avec le milieu extérieur : $T_R(t = 0\text{-}\varepsilon) = T_a$. Lorsqu'elle dissipe sa puissance, la température T_R (t) de la résistance (figure 2) est telle que T_R (t) >T_a, on admet alors que la quantité de chaleur élémentaire dQ cédée au milieu extérieur, uniquement par convection pendant un laps de temps infinitésimal dt est de la forme :

$$\boxed{dQ = h\,S\left[T_R(t) - T_a\right]dt} \quad (1)$$

h = 70 W m^{-2} K^{-1} représente le coefficient de transfert convectif et S la surface de la résistance. On suppose de plus que la température est homogène dans le volume de la résistance.

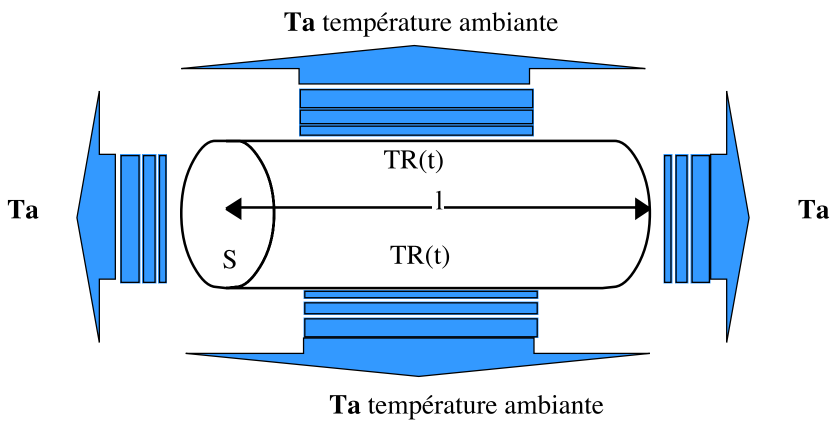


Figure 2

[1] Philippe ROUX © 2006

2. Sachant que la puissance électrique P va se dissiper par effet Joule, durant le laps de temps dt donner les expressions :
   a. De l'énergie élémentaire reçue par la résistance.
   b. De l'énergie élémentaire stockée dans R et qui a permis d'élever sa température de la quantité élémentaire dT.
   c. De l'énergie élémentaire perdue par effet convectif.

3. Faire le bilan énergétique et écrire l'équation différentielle du premier ordre liée au phénomène.

4. Résoudre l'équation différentielle sans oublier la constante d'intégration. Montrer que :

$$T_R(t) = T_a + \frac{P}{hS}\left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right]$$

   où τ est la constante de temps dont on donnera l'expression.

5. Construire le graphe de T_R (t). Indiquer ses propriétés.
   Déterminer la température limite T_{lim} atteinte au bout d'un temps assez long ($t > 5\ \tau$)?

6. On se place maintenant en régime permanent. Retrouver a température limite T_{lim} par une autre méthode en donnant une analogie électrique au phénomène.

7. Le constructeur indique une puissance P_{max} de 1/4 W à T = 70 °C. Que pensez-vous du résultat précédent ? Que se passe-t-il lorsque le courant dans la résistance est égal à 10 mA ?

CORRECTION

1. Puissance électrique : $P = RI^2 = \frac{1}{4} W$.

2. L'énergie élémentaire dE reçue par la résistance durant le temps élémentaire dt est telle que : dE = P.dt.
   Cette énergie va permettre :
   - D'augmenter la température du corps de la résistance de la quantité élémentaire dT, ce qui correspond à une énergie : $m.C_p.dT$. D'autre part
   - D'assurer l'échange convectif de la résistance avec le milieu ambiant, soit une énergie élémentaire : $dQ = h\,S[T_R(t) - T_a]dt$.

3. Compte tenu de la question précédente, on a le bilan énergétique suivant :

$$\boxed{Pdt = mC_p dT + h\,S[T_R(t) - T_a]dt}$$

   On en déduit l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{dt}{mC_p} = \frac{dT}{P - hS(T_R(t) - T_a)}}$$

4. Résolution de l'équation différentielle.
5.
   Posons : $u = P - hS(T_R(t) - T_a)$, on en déduit : $du = -hSdT$ de telle sorte que l'équation devienne : $-\frac{hS}{mC_p} dt = \frac{du}{u}$

   On met en évidence la constante de temps $\boxed{\tau = \frac{mC_p}{hS}}$

   En intégrant (ne pas oublier la constante K), on obtient : $-\frac{t}{\tau} = \ln(\frac{u}{K})$

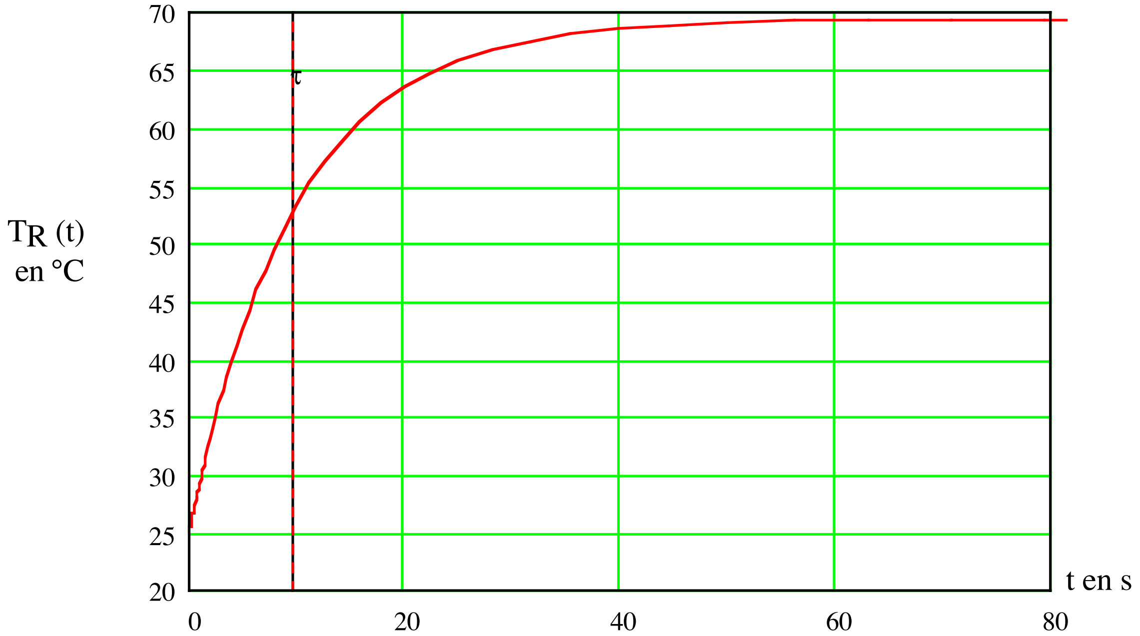
   Il vient alors : $P - hS(T_R(t) - T_a) = K\exp(-\frac{t}{\tau})$

   Pour déterminer la constante K, on se place à t = 0 où T_R (0) =T_a. Donc K = P.

   Solution :

$$\boxed{T_R(t) = T_a + \frac{P}{hS}\left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right]}$$

6. On détermine : S = 80,5 mm^2, t = 9,85 s et $\frac{P}{hS} = 44{,}36°C$.

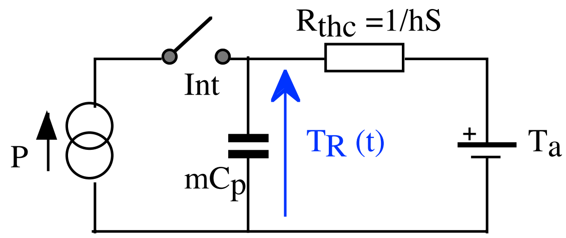


Evolution de T_R (t) en fonction du temps

Pour t -> infini, $T_{\lim} = T_a + \frac{P}{hS} = 69{,}4°C$.

Au bout du temps t = 5 τ la résistance a pratiquement atteint sa température maximale.

7. Le schéma analogique électrique du phénomène est le suivant :



A t = 0 s, où T_R (0) = T_a, on ferme l'interrupteur. On assiste alors à la charge de la capacité ($m.C_p$) avec la constante de temps $\tau = \frac{mC_p}{hS}$.

Lorsque la capacité est chargée, elle se comporte comme un circuit ouvert. Dans ces conditions : $T_R(\infty) = \frac{P}{hS} + T_a$. On retrouve bien la température limite précédente.

8. Dans ces conditions la puissance P reçue est égale à 1W. La température de la résistance atteint 202 °C et le composant se trouve en dehors des limites imposées par le fabriquant. Le phénomène de convection n'assure plus une évacuation suffisante du flux de chaleur.