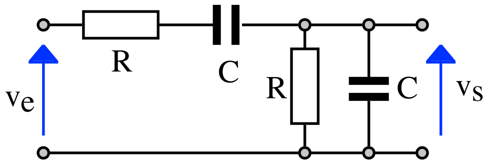
[0]CIRCUIT DE WIEN

On considère le montage suivant, nommé "circuit de Wien", composé d'un circuit RC série et d'un circuit RC parallèle. Ces deux circuits sont caractérisés par leur pulsation de coupure à –3 dB : $\omega_0 = 1/(RC)$.



1) Déterminer la fonction de transfert $T(j\omega) = v_S / v_e$ du montage en fonction des pulsations ω et ω_0 à savoir :

$$\boxed{T(j\omega) = \frac{1}{3 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}} \quad (1)$$

2) En déduire :

a) La fréquence f pour laquelle le déphasage Φ de v_S par rapport à v_e est nul. Quelle est alors la valeur du module de $T(j\omega)$ exprimé en décibels ?

b) La bande passante $\Delta\omega$ du montage en fonction de ω_0. A cet effet, on posera : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

On remarquera que l'expression de $T(j\omega)$ précédente ne permet pas de tracer le graphe asymptotique de BODE de $|T(j\omega)|$. Dans ce but, on montre qu'il est possible d'exprimer la fonction de transfert sous la forme suivante :

$$\boxed{\underline{T}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}} \quad (2)$$

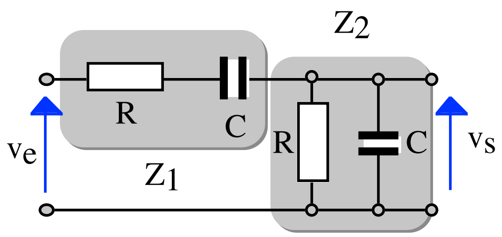
3) Déterminer alors l'expression des pulsations ω_1 et ω_2 en fonction de ω_0.

4) Tracer le graphe asymptotique de BODE du module de T (jf) avec f_0 = 1000 Hz.

5) Tracer le graphe asymptotique de BODE de l'argument Φ de T (jf) avec f_0 = 1000 Hz.

CORRECTION

Q1 : On utilise les impédances Z_1 et Z_2 :



- $\underline{Z}_1 = R + \dfrac{1}{j\omega C}$
- $\underline{Z}_2 = \dfrac{R}{1 + j\omega RC}$

Diviseur de tension : $T(j\omega) = \dfrac{R}{1 + j\omega RC} \dfrac{1}{R + \dfrac{1}{j\omega C} + \dfrac{R}{1 + j\omega RC}}$

Soit en développant : $T(j\omega) = \dfrac{R}{3R + j\omega R^2 C + \dfrac{1}{j\omega C}} = \dfrac{1}{3 + j(\omega RC - \dfrac{1}{\omega RC})}$

Sachant que : $RC = \dfrac{1}{\omega_0}$ il vient :

$$\boxed{T(j\omega) = \frac{1}{3 + j(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega})}} \quad (1)$$

Q2a : Déphasage : $\Phi = -Arc\tan(\dfrac{1}{3}(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}))$

$\Phi = 0$ lorsque : $(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}) = 0$ soit : $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

On obtient alors : $|T(\omega_0)| = \dfrac{1}{3}$ soit en dB : $20 \log|T(\omega_0)| = -9{,}54$ dB.

Q2b : Module de la fonction de transfert : $|T(j\omega)| = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{9}(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega})^2}}$

La bande passante est obtenue pour les valeurs particulières de ω telles que : $|T(j\omega)| = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\sqrt{2}}$.

Soit : $\dfrac{1}{9}(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega})^2 = 1$ conduisant à l'équation : $(x - \dfrac{1}{x}) = \pm 3$.

On doit résoudre deux équation du second degré :

- $x^2 + 3x - 1 = 0$
- $x^2 - 3x - 1 = 0$

Seules les solutions positives sont acceptables : $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

On en déduit alors la bande passante : $\boxed{\Delta\omega = 3\omega_0}$

Q3 : On procède par identification entre les deux expressions sachant que l'équation (1)

s'exprime selon : $\dfrac{1}{3+j(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}=\dfrac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2+3j\frac{\omega}{\omega_0}}$

et l'équation (2): $\underline{T}(j\omega)=\dfrac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{(1+j\frac{\omega}{\omega_1})(1+j\frac{\omega}{\omega_2})}=\dfrac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}+j\omega(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2})}$

La solution donne deux équations :

- $\omega_0^2=\omega_1\omega_2$
- $\dfrac{3}{\omega_0}=\dfrac{1}{\omega_1}+\dfrac{1}{\omega_2}$

Soit : $\boxed{\omega_2=\omega_0\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ et $\boxed{\omega_1=\omega_0\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

Q4 : Graphe asymptotique de Bode du module de la fonction de transfert :

$|T(j\omega|=\dfrac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2}\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_2})^2}}$ soit en fréquence : $|T(jf|=\dfrac{\frac{f}{f_0}}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_1})^2}\sqrt{1+(\frac{f}{f_2})^2}}$

f_2 = 2,618 kHz $\qquad$ f_1 = 2,236 kHz

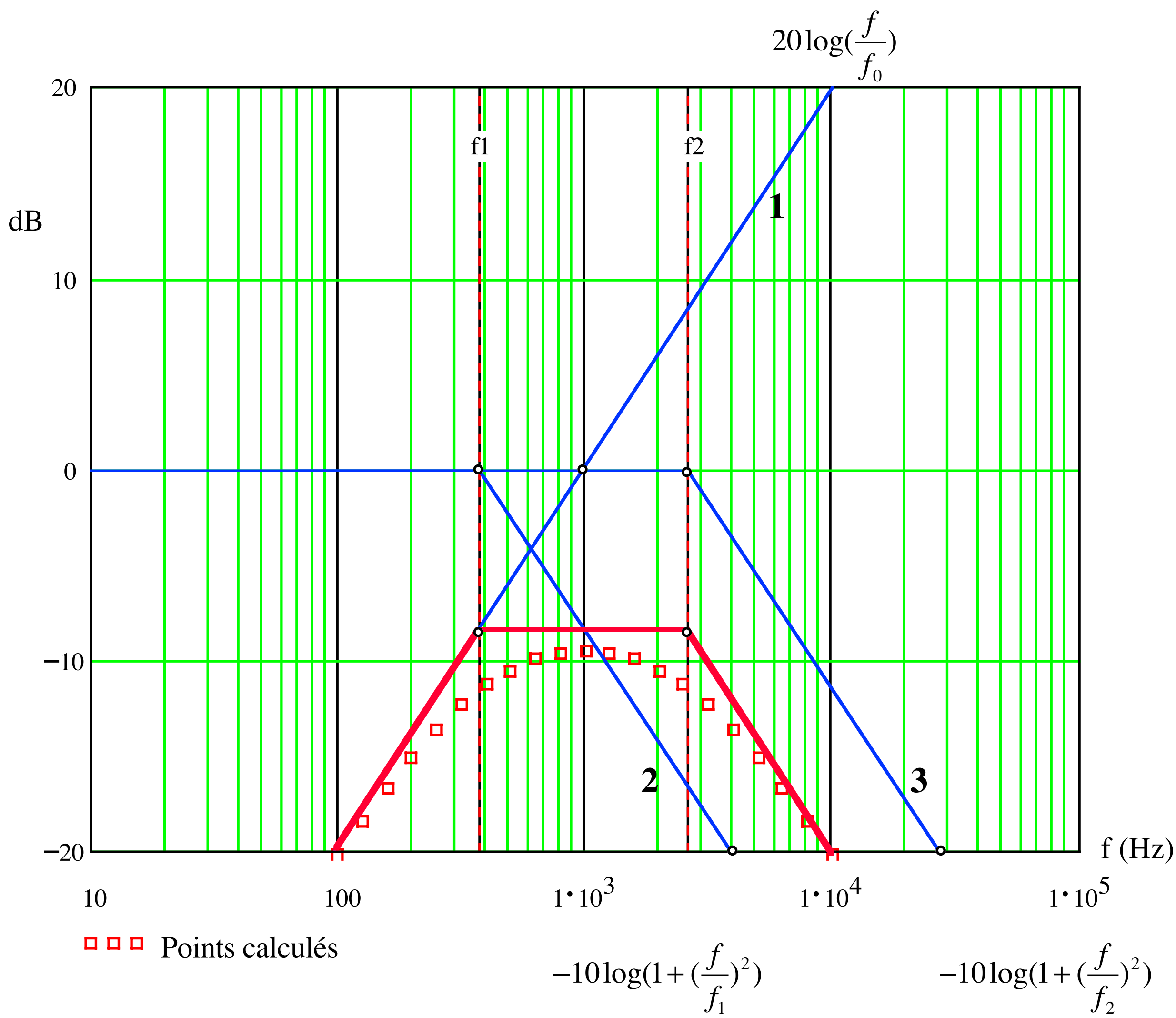
Exprimons en dB : $\boxed{|T(jf|_{dB}=20\log(\frac{f}{f_0})-10\log(1+(\frac{f}{f_1})^2)-10\log(1+(\frac{f}{f_2})^2)}$

Le tracé du graphe asymtotique de Bode complet fait intervenir trois graphes intermédiaires :

- **Graphe 1** : $20\log(\frac{f}{f_0})$ passant par f_0 et de coefficient directeur 20 dB par décade.
- **Graphe 2** : $-10\log(1+(\frac{f}{f_1})^2)$ ayant une asymptote 0 dB pour f-> 0. L'autre asymptote pour f-> ∞ passe par f_1 et son coefficient directeur est de -20 dB par décade.
- **Graphe 3** : $-10\log(1+(\frac{f}{f_2})^2)$ ayant une asymptote 0 dB pour f-> 0. L'autre asymptote pour f-> ∞ passe par f_2 et son coefficient directeur est de -20 dB par décade.

Le tracé du graphe asymtotique de Bode complet (en rouge sur la figure) est la somme des trois graphes intermédiaires :

- $f < f_1$, le graphe 1 impose son coefficient directeur (2 et 3 apportent 0dB).
- $f_1 < f < f_2$, les graphes 1 et 2 se compensent et le résultat donne un ligne horizontale.
- $f > f_2$ les graphes 1 et 2 se compensent et le graphe 3 impose son coefficient directeur.



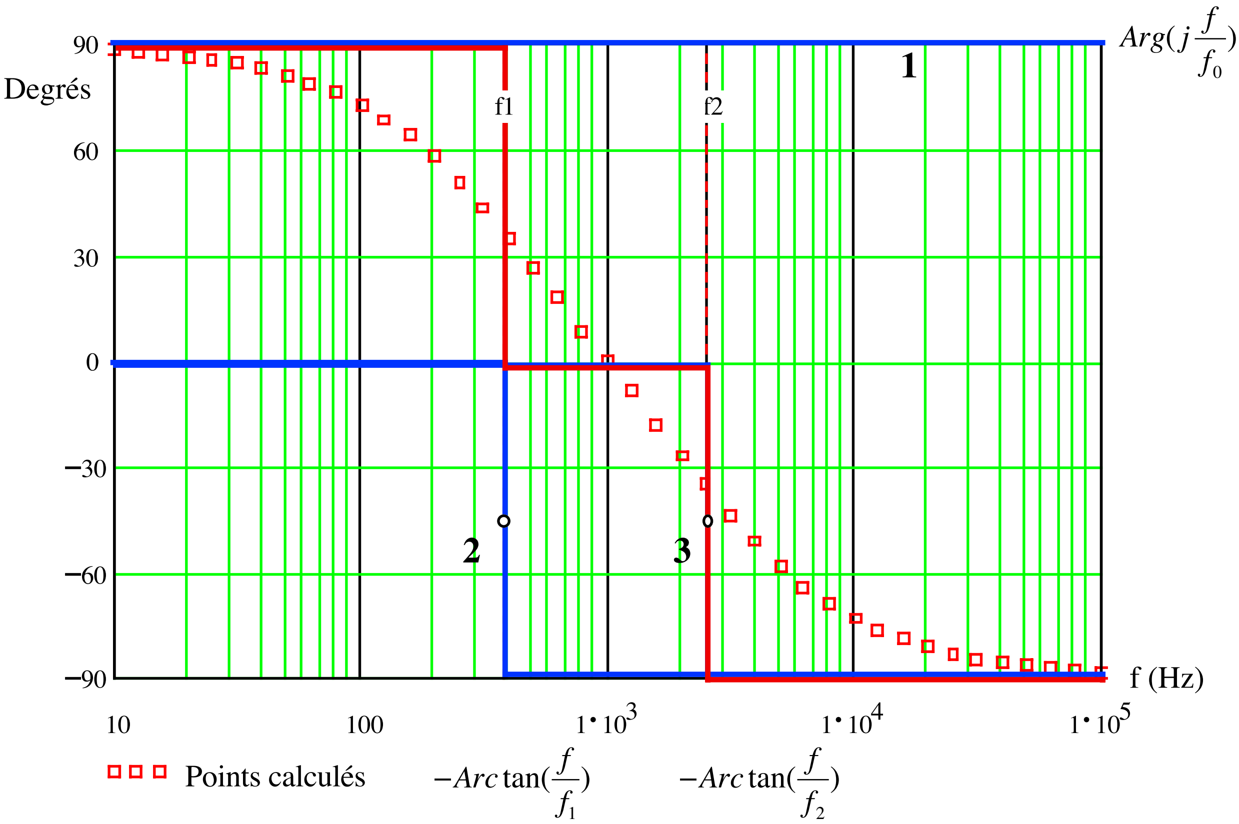
Q5 : Expression du déphasage Φ de v_s par rapport à v_e :

$$\boxed{\Phi = 90 - Arc\tan(\frac{f}{f_1}) - Arc\tan(\frac{f}{f_2})}$$

Le tracé du graphe asymtotique de Bode complet fait intervenir trois graphes intermédiaires :

- **Graphe 1** : + 90 ° constant.
- **Graphe 2** : $-Arc\tan(\frac{f}{f_1})$ ayant une asymptote 0° pour f-> 0. L'autre asymptote pour f-> ∞ correspond à – 90°. Pour f_1 le déphasage est de –45°.

- **Graphe 3** : $-Arc\tan(\frac{f}{f_2})$ ayant une asymptote 0° pour f-> 0. L'autre asymptote pour f-> ∞ correspond à – 90°. Pour f_2 le déphasage est de –45°.



Le tracé du graphe asymtotique de Bode complet (en rouge sur la figure) est la somme des trois graphes intermédiaires :

- $f < f_1$, le graphe 1 impose son déphasage de 90° (2 et 3 apportent 0°).
- $f_1 < f < f_2$, les graphes 1 et 2 se compensent et le résultat donne un ligne horizontale 0°.
- $f > f_2$ les graphes 1 et 2 se compensent et le graphe 3 impose son déphasage de –90°.

La figure précédente compare le graphe asymptotique complet avec des points calculés.