[1]**REPARTITION DE LA TEMPERATURE DANS UNE BARRE EN CUIVRE EN REGIME PERMANENT**

On considère en figure 1, une barre cylindrique homogène en cuivre de longueur L égale à 50 cm et de rayon r de 0.5 cm. On nomme S la section du cylindre et S_L sa surface latérale. La conductivité thermique du cuivre est $\lambda = 400\ W.m^{-1}.K^{-1}$.
La surface latérale de la barre est dans un premier temps isolée thermiquement par un matériau isolant parfait. De cette manière, la surface latérale n'échange pas d'énergie avec le milieu ambiant à la température $T_a = 25$ °C. On se place en régime permanent.

La face de la barre située en x = 0 est maintenue à une température T_1 de 225 °C. La barre est assez longue pour que la température de l'autre extrémité (x = L) soit égale à la température ambiante $T_a = 25$ °C (on néglige donc l'effet convectif à ce niveau). Dans ces conditions, la répartition T (x) de la température est linéaire.

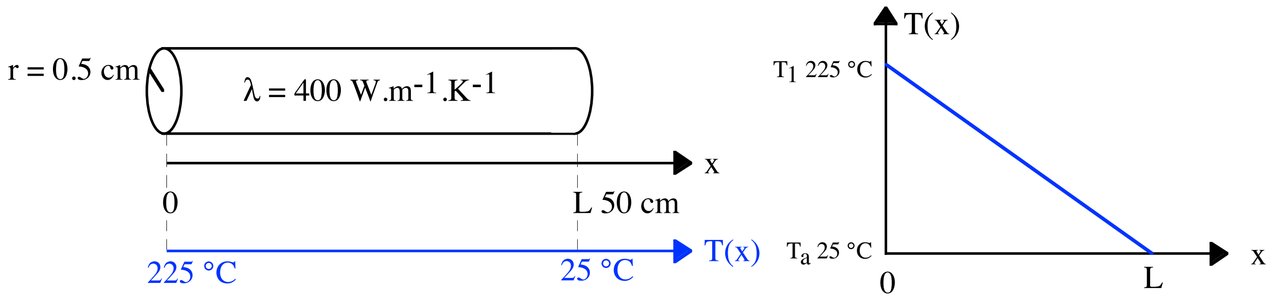


Figure 1

1. En utilisant la loi de Fourier, déterminer l'expression du flux de chaleur Φ(x) qui traverse le dispositif. Faire l'A.N. Calculer la température à la distance x de 10 cm. Que pensez-vous de la variation du flux de chaleur Φ (x) en fonction de la distance x ?

On retire maintenant l'isolant thermique de la surface latérale de la barre. Celle-ci est alors soumise au phénomène de convection forcée avec un coefficient d'échange : $h_C = 196\ W.m^{-2}.K^{-1}$. Dans ces conditions, le flux de chaleur de conduction $\Phi(x)$ est non linéaire (figure 2). On se propose de déterminer la répartition de la température T (x) dans la barre.

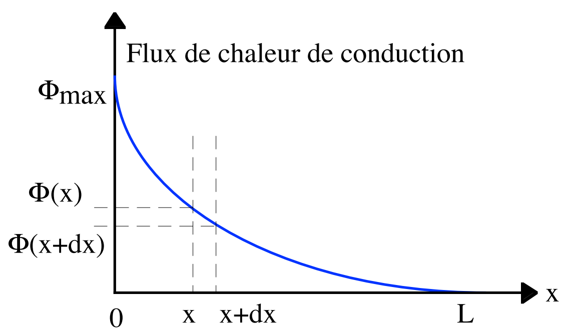


Figure 2

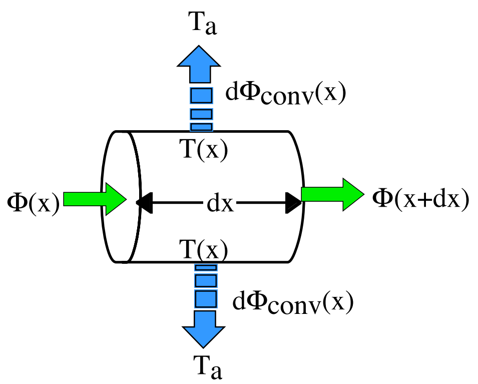


Figure 3

---

[1] Philippe ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

On considère en figure 3 un élément de la barre d'épaisseur dx suffisamment faible pour que l'ensemble de sa surface latérale soit à une température T (x).

2. Déterminer dans ces conditions, l'expression du flux élémentaire de chaleur $d\Phi_{conv}$ (x) relatif à l'échange convectif avec le milieu ambiant à la température T_a

3. En exploitant la loi fondamentale de Fourier, déterminer l'expression de la variation élémentaire du flux de chaleur $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ qui s'établit alors dans la barre entre x et x+dx.

4. En écrivant le bilan thermique pour l'élément de barre, à savoir : $d\Phi_{conv} + d\Phi(x) = 0$, montrer que la répartition de la température T(x) le long de la barre est donnée par une équation différentielle du deuxième ordre :
$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \alpha^2(T(x) - T_a) = 0 \qquad (1)$$
Donner l'expression du coefficient α et faire l'application numérique.

5. L'équation (1) précédente a pour solution : $T(x) = T_a + C_1 \exp(\alpha x) + C_2 \exp(-\alpha x)$ (2).

   a. Donner les unités des constantes C_1 et C_2 et du paramètre α.

   b. En exploitant les conditions aux limites (x = 0 et x = L) du dispositif étudié, déterminer la valeur des constantes C_1 et C_2.
   En déduire l'expression approchée de T (x).

6. Tracer la courbe représentative de l'évolution de la température T (x) le long de la barre. Déterminer la valeur de la température pour x = 10 cm

7. Calculer la puissance P_{conv} perdue par effet convectif.

CORRECTION

1. La loi de Fourier donne l'expression du flux de chaleur Φ (x) dans la barre :
   $\Phi(x) = -\lambda S \dfrac{dT(x)}{dx}$ avec : $\dfrac{dT(x)}{dx} = -\dfrac{T_1 - T_a}{L} = -400°C.m^{-1}$
   Sachant que : S = 78,54.10^{-6} m^2, le flux de chaleur est constant soit : Φ (x) = 12,57 W.
   Répartition de la température T (x) : $T(x) = T_1 - \dfrac{T_1 - T_a}{L} x$
   A la distance x de 10 cm, la température est de 185 °C. Le flux de chaleur Φ(x) est constant.

2. Considérons une tranche dx de la barre. Cette tranche est suffisamment fine pour que sa température T (x) puisse être considérée comme constante.
   Cet élément échange avec le milieu ambiant, à la température T_a, par phénomène de convection par l'intermédiaire de sa surface latérale, $dS_L = 2\pi r dx$ selon l'expression : $d\Phi_{conv} = h_c (T(x) - T_a) dS_L$

   $$\boxed{d\Phi_{conv}(x) = h_c (T(x) - T_a) 2\pi r dx}$$

3. Cet échange de chaleur par effet convectif va entraîner une variation du flux de conduction dans l'élément de barre considéré.
   La loi de Fourier indique que : $\Phi(x) = -\lambda S \dfrac{dT(x)}{dx}$ soit une variation entre x et x+dx :

   $$\boxed{\frac{d\Phi(x)}{dx} = -\lambda S \frac{d^2T(x)}{dx^2}}$$

4. Bilan thermique pour l'élément de barre : $d\Phi_{conv} + d\Phi(x) = 0$:

   $$h_c (T(x) - T_a) 2\pi r dx - \lambda S \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx = 0$$

   $$\boxed{\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h_c}{\lambda r}(T(x) - T_a) = 0}$$

   Expression du coefficient α : $\alpha = \sqrt{\dfrac{2h_c}{\lambda r}} = 14 m^{-1}$

5. Solution de l'équation différentielle : $T(x) = T_a + C_1 \exp(\alpha x) + C_2 \exp(-\alpha x)$

   a. Les constantes C_1 et C_2 sont en °C, alors que le coefficient α est en m^{-1}.

   b. Pour x = 0, $T_1 = T_a + C_1 + C_2$.
      Lorsque x = L la barre est à la température T_a : $T_a = T_a + C_1 \exp(\alpha L) + C_2 \exp(-\alpha L)$.
      A partir de ces deux dernières équations, on calcule les constantes C_1 et C_2 :

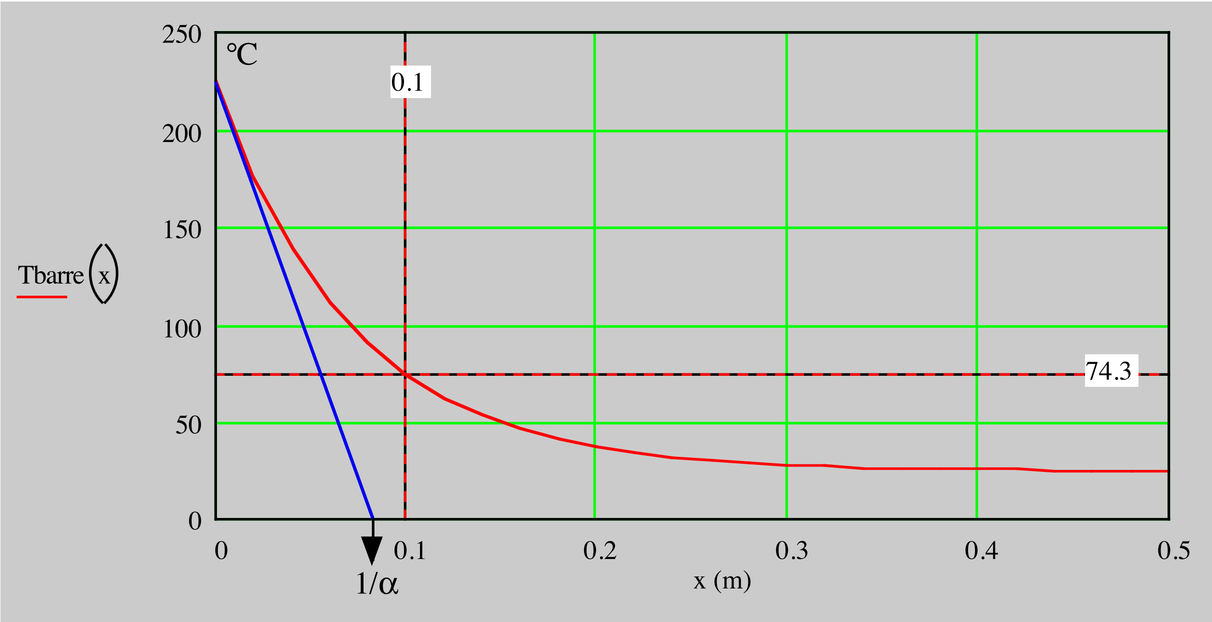
      $$C_1 = -\frac{(T_1 - T_a)\exp(-\alpha L)}{\exp(\alpha L) - \exp(-\alpha L)} = -1{,}66.10^{-4} °C$$

      $$C_2 = T_1 - T_a - C_1 \approx T_1 - T_a = 200°C$$

Sachant que la constante C_1 est très faible, la solution approchée est donc :

$$\boxed{T(x) = T_a + (T_1 - T_a)\exp(-\alpha x)}$$

6. Courbe représentative de l'évolution de la température T (x) le long de la barre.



Température pour x = 10 cm : T (0,1m) = 74,3 °C

7. Puissance P_{conv} perdue par convection.

$$P_{conv} = \int_0^L 2\pi r h_c (T(x) - T_a)dx \quad -> \quad P_{conv} = 2\pi r h_c (T_1 - T_a)\int_0^L \exp(-\alpha x)dx$$

$$\int_0^L \exp(-\alpha x)dx = \left[-\frac{\exp(-\alpha x)}{\alpha}\right]_0^L = \frac{-\exp(-\alpha L) + 1}{\alpha}$$

Application numérique : P_{conv} = 87,88 W.