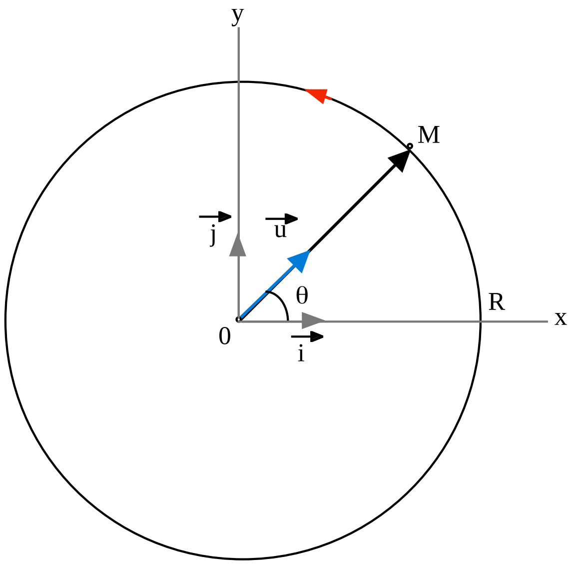
[1]MOUVEMENT D'UN MOBILE SUR UN CERCLE

Le mouvement d'un point M sur un cercle de centre O et de rayon R, est défini par la relation : $\vec{OM} = R.\vec{u}(\theta)$ où $\vec{u}(\theta)$ est le vecteur unitaire associé au vecteur $\vec{OM}$.



Déterminer dans ce repère, l'expression :

1. Du vecteur vitesse $\vec{v}$ de M.
2. Du vecteur accélération $\vec{a}$ et ses composantes normale et tangentielle.

CORRECTION

1. Le vecteur vitesse de M est donné par la relation habituelle : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$

   $\vec{v} = \dfrac{d}{dt}\left[R\vec{u}(\theta)\right] = R\dfrac{d}{dt}\vec{u}(\theta) + \dfrac{dR}{dt}\vec{u}(\theta)$

   Le rayon R étant constant : $\dfrac{dR}{dt} = 0$. Il vient donc : $\vec{v} = R\dfrac{d}{dt}\vec{u}(\theta)$ soit :

   $\vec{v} = R\dfrac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ où $\dfrac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire ω du point M.

   Que représente $\dfrac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta}$?

   Exprimons le vecteur unitaire $\vec{u}$ dans le repère (ox, oy) : $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\ \vec{i} + \sin(\theta)\ \vec{j}$

   Soit en dérivant par rapport à θ :

[1] Ph.ROUX © 2006 http://rouxphi3.perso.cegetel.net

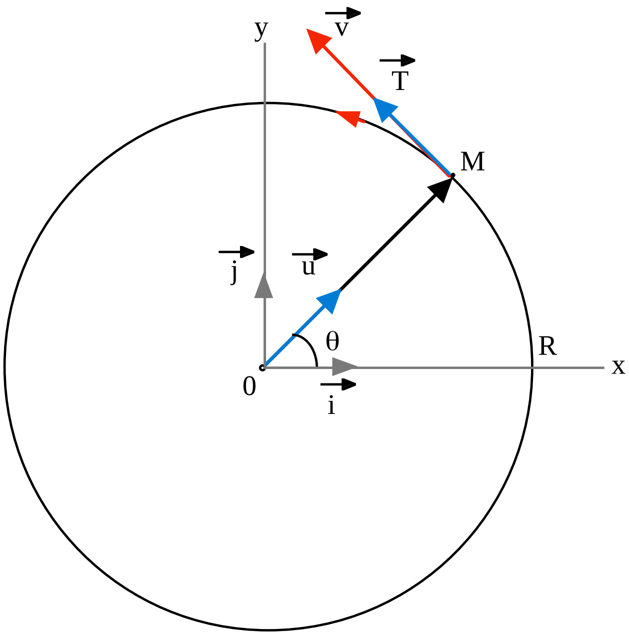
$$\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\cos(\theta)\ \vec{i} + \cos(\theta)\ \frac{d\vec{i}}{d\theta} + \frac{d}{d\theta}\sin(\theta)\ \vec{j} + \sin(\theta)\ \frac{d\vec{j}}{d\theta}$$

Sachant que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont indépendants de l'angle θ, leur dérivée par rapport à θ est nulle, il vient alors :

$$\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = -\sin(\theta)\ \vec{i} + \cos(\theta)\ \vec{j}$$

La dérivée du vecteur $\vec{u}$ par rapport à θ. est donc un vecteur unitaire déduit du vecteur $\vec{u}$ par une rotation de + π/2. Il s'agit donc du vecteur unitaire $\vec{T}$ qui porte la vitesse. Finalement :

$$\boxed{\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\vec{T} = R\omega\vec{T}}$$



2. Le vecteur accélération de M est donné par la relation habituelle : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = R\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}(\vec{T}) + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{T} \qquad \text{avec : } \frac{d}{dt}(\vec{T}) = \frac{d\vec{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Comme précédemment, la dérivée du vecteur $\vec{T}$ par rapport à θ est un vecteur unitaire déduit du vecteur $\vec{T}$ par une rotation de + π/2. Il s'agit donc du vecteur unitaire $-\vec{u}$ qui n'est autre que le vecteur unitaire normal $\vec{N}$. On obtient donc :

$$\boxed{\vec{a} = R\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2\vec{N} + R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{T}}$$

L'accélération possède deux composantes :

- L'accélération normale : $a_n = R\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$

- L'accélération tangentielle : $a_t = R\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ où $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ représente l'accélération angulaire α.